

東大複素数平面問題を多面的に探る

山 川 宏 史

岡山朝日研究紀要 第40号（2019年3月）抜刷
〒703-8278 岡山市中区古京町2-2-21

東大複素数平面問題を多面的に探る

山 川 宏 史

1 はじめに

大学入試では、近年複素数平面の問題が大幅に増加した。特に図形への応用分野の問題の出来が合否の大きな分かれ目となっている。一昨年に引き続き、東大複素数平面の問題の背景について考察を加えてみることにした。なお、東大では 2016 年から 3 年連続でこの分野が出題され、頻出分野となっていることも特筆される。本気で志望している者は、この分野でも是非高得点を。

2 東大理科第 5 問について

■問題■

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする。点 $P(z)$ は C 上にあり、点 $A(1)$ とは異なるとする。点 P における円 C の接線に関して、点 A と対称な点を $Q(u)$ とする。 $w = \frac{1}{1-u}$ とおき、 w と共役な複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1) u と $\frac{\overline{w}}{w}$ を z についての整式として表し、絶対値の商 $\frac{|w + \overline{w} - 1|}{|w|}$ を求めよ。

(2) C のうち実部が $\frac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする。点 $P(z)$ が C' 上を動くときの点 $R(w)$ の軌跡を求めよ。

▲複素数平面を全面に出した解答▲

(1) 接線方向を表す複素数は、 z を原点の周りに $-\frac{\pi}{2}$ 回転した $\frac{z}{i}$ である。また、接線に関して点 A

と点 Q は対称であるから、 $\frac{u-z}{\frac{z}{i}}$ と $\frac{1-z}{\frac{z}{i}}$ は互いに共役な複素数である。 ← 発想は厳しいか？

$$\frac{u-z}{\frac{z}{i}} = \frac{1-\overline{z}}{\frac{z}{-i}} \quad u-z = -z \cdot \frac{1-\overline{z}}{z} \quad u-z = -z \cdot \frac{z-\overline{z}z}{zz}$$

$z\overline{z}=1$ であるから $u-z = -z(z-1)$

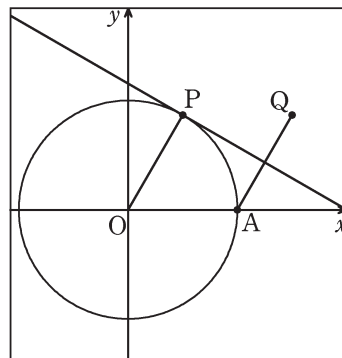
したがって $u=2z-z^2$ ……Ⓐ @ やや易!

また $w = \frac{1}{(z-1)^2}$ であるから

$$\frac{\overline{w}}{w} = (z-1)^2 \cdot \frac{1}{(\overline{z}-1)^2}$$

$$= (z-1)^2 \cdot \frac{z^2}{\overline{z}^2(\overline{z}-1)^2} = z^2 \quad \dots\dots \text{Ⓑ} \quad @ \text{この設問は、ありがたい誘導と次でわかる。}$$

$$\text{よって } \frac{w + \overline{w} - 1}{w} = 1 + z^2 - (z-1)^2 = 2z \quad \dots\dots \text{①}$$



したがって $\frac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}=2|z|=2$ ……Ⓐ @ この設問は、(2) のための準備

(2) (1) の最後の式の分母を払って両辺を 2 で割ると

$$\left| \frac{w+\overline{w}}{2} - \frac{1}{2} \right| = |w-0| \quad \leftarrow \text{この式変形ができれば、定義により放物線はすぐ出る。}$$

よって、 w は複素数平面上で原点と実部が $\frac{1}{2}$ の複素数を表す直線から等距離にある。すなわち、これらをそれぞれ焦点、準線とする放物線上に存在する。題意より

$$\frac{2}{3}\pi \leq \arg(z-1) \leq \frac{4}{3}\pi$$

$$w=(z-1)^{-2} \text{ であるから } -\frac{8}{3}\pi \leq \arg w \leq -\frac{4}{3}\pi$$

$$\text{角を補正して } -\frac{2}{3}\pi \leq \arg w \leq \frac{2}{3}\pi$$

よって、求める軌跡は右図の放物線の一部。……Ⓑ

@ (2) では、偏角の変換で範囲を求める操作がポイント。なお、

$w=x+yi$ (x, y は実数) とおく方法は次のとおり。偏角も用いない解法で掲載しておく。ただし、計算が長く、特に実部の条件を直すのは大変で大損ゆえ、お奨めできない。

C' 上の点が満たすべき条件は

$$\frac{z+\overline{z}}{2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad z+\overline{z} \leq 1$$

$$\textcircled{1} \text{ を用いると } \frac{\overline{z}(w+\overline{w}-1)}{2w} + \frac{\overline{w}+w-1}{2\overline{w}} \leq 1$$

$$\text{両辺を } 2w\overline{w} (>0) \text{ 倍して } w^2+\overline{w}^2+2w\overline{w}-w-\overline{w} \leq 2w\overline{w}$$

$$\text{よって } w^2+\overline{w}^2-w-\overline{w} \leq 0, w \neq 0$$

ここで、 $w=x+yi$ (x, y は実数) とおくと

$$x^2+2xyi-y^2+x^2-2xyi-y^2-(x+yi)-(x-yi) \leq 0$$

$$\text{よって } \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 \leq \frac{1}{4} \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{また、}|z|=1 \text{ より } \left| \frac{w+\overline{w}-1}{2w} \right| = 1 \quad |w+\overline{w}-1|=2|w|$$

$$\text{よって } |2x-1|=2\sqrt{x^2+y^2}$$

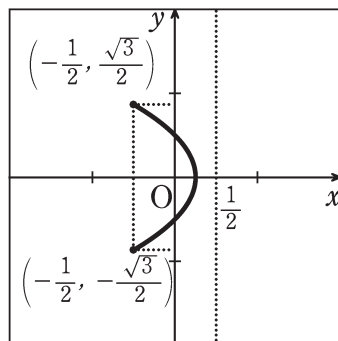
$$\text{両辺は } 0 \text{ 以上であるから、} 2 \text{ 乗して整理すると } y^2 = -x + \frac{1}{4} \dots\dots \textcircled{3}$$

② の範囲において ③ が求める軌跡で、次の放物線の一部である。

$$y^2 = -x + \frac{1}{4} \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{4}\right) \dots\dots \textcircled{8} \quad (\text{図略})$$

なお、参考書によっては、そっくり問題「 $|z|=1$ のときの $\frac{2}{(z+1)^2}$ の軌跡」が、収録されている本

もある。近畿大学の過去問で、もちろん答えは放物線に。やはり、この性質は知っている人は知っているのか。筆者は、またも勉強不足を実感。今宵も枕を濡らして反省を。



▲(1)の偏角を設定するお奨め解答▲

点 P における接線と直線 AQ との交点を H とし

$z = \cos \theta + i \sin \theta \quad (-\pi < \theta \leq \pi)$ とおくと

$$\angle OPA = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}, \quad \angle APH = \frac{\pi}{2} - \angle OPA = \frac{\theta}{2}$$

2 点 A, Q は直線 PH に関して対称であるから

$$PA = PQ, \quad \angle APH = \angle QPH$$

よって、 $\angle APQ = \theta$ となり、点 A を点 P を中心に θ だけ

回転した点が Q になるから

$$u - z = (1 - z)z \quad u = -z^2 + 2z \quad \cdots \cdots \text{㊦} \quad (\text{これは } \theta < 0 \text{ のときも成り立つ。})$$

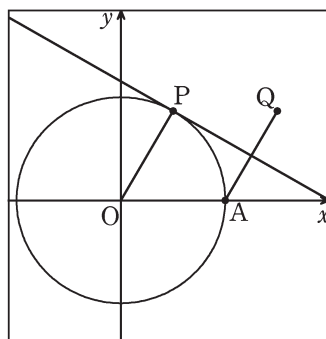
@ これぞ、複素数の醍醐味。この図形的考察から、次のスーパー別解が生まれる。

▲(1)のスーパー別解▲

直線 OP と接線 ℓ は点 P で直交するので、点 A の直線 OP に関する対称点 $A'(z^2)$ と点 Q は点 P に関して対称である。よって

$$z = \frac{z^2 + u}{2} \quad \text{ゆえに} \quad u = 2z - z^2 \quad \cdots \cdots \text{㊦}$$

@ 何と簡単、瞬殺とはこのこと。筆者は完解認定と思うが、読者諸賢のご意見は如何に。



3 東大理科第 5 問 (1) の媒介変数表示の考察

▲極座標による解答▲

$\angle xAQ = \angle AOP = \theta \quad (-\pi < \theta \leq \pi)$ とおくと、点 A から直線 OP に垂線を引くことにより

$$AH = 1 - \cos \theta$$

すなわち、点 A を極、半直線 Ax を始線とすると、点 Q は極方程式 $r = 2(1 - \cos \theta)$ を満たす。

よって $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ}$

$$\begin{aligned} &= (1, 0) + (r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= (1 + 2(1 - \cos \theta) \cos \theta, 2(1 - \cos \theta) \sin \theta) \\ &= (2 \cos \theta - \cos 2\theta, 2 \sin \theta - \sin 2\theta) \end{aligned}$$

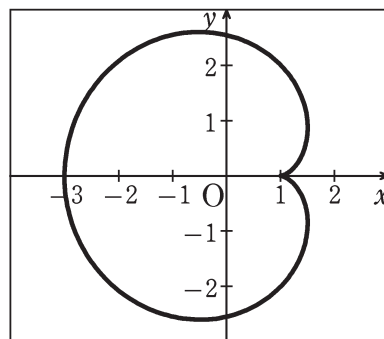
ゆえに $P(\cos \theta, \sin \theta)$,

$$Q(2 \cos \theta - \cos 2\theta, 2 \sin \theta - \sin 2\theta)$$

$P(z)$ に対して、 z^2 を表す複素数は $\cos 2\theta + i \sin 2\theta$ となる

から、 $Q(u)$ は $u = 2z - z^2 \quad \cdots \cdots \text{㊦}$

@ 2 倍角の公式で z^2 にする場合も必要。



補足 これにより、点 Q の媒介変数表示が $Q(2 \cos \theta - \cos 2\theta, 2 \sin \theta - \sin 2\theta)$ となることがわかつた。

極が原点ではないが、cardioid になる。それを検証するには、図全体を y 軸に関して対称移動 (θ を $\pi - \theta$ に変更) するとよい。確かに、 $r = 2(1 + \cos \theta)$ となる。原題においては、単位円に半径 1 の円が点 A(1, 0) で外接している状態から、外側の円が滑ることなく転がったときの初期状態で点 A にいた点の軌跡である。なお、類題が 2005 年岡山大学に出題され、長さの求値もついていた。

■ 岡山大学の過去問 ■

O を原点とする座標平面において、点 A の座標を (2, 0) とする。線分 OA を直径とする円周上の点 T における接線に O から下ろした垂線を OP とする。T が円周上を動くとき、P が描く曲線の長さを求めよ。

▲解答 ▲B(1, 0) とし、B から直線 OP に下ろした垂線を BH とする。

$\angle ABT = \theta$ とすると、 $\angle AOP = \theta$ である。

また、 $OH = \cos \theta$ 、 $PH = 1$ であるから、 $P(x, y)$ とおくと

$$x = (1 + \cos \theta) \cos \theta, \quad y = (1 + \cos \theta) \sin \theta$$

これは、 $\theta > \frac{\pi}{2}$ などのときにも成り立つ。

$$\frac{dx}{d\theta} = (-\sin \theta) \cos \theta + (1 + \cos \theta)(-\sin \theta)$$

$$= -\sin \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = -\sin \theta - \sin 2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = (-\sin \theta) \sin \theta + (1 + \cos \theta) \cos \theta$$

$$= -\sin^2 \theta + \cos \theta + \cos^2 \theta = \cos \theta + \cos 2\theta$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 1 + 1 + 2(\cos 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta \sin \theta) = 2 + 2\cos \theta = 4\cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\text{よって } \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$$

したがって、求める曲線の長さは

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 4 \left[2 \sin \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi} = 8 \quad \dots\dots \text{㊦} \quad @ \text{ お馴染み cardioid の長さ}$$

@ 長さを求める際に、 $\cos$ の加法定理の逆変形をする点が、初見で解くにはやや厳しい。むしろ、極座標の長さ公式を証明してから適用するほうが賢いし、汎用性に富む。具体的には

別解 極座標系で考えると、 $r = 1 + \cos \theta$ 、 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ であるから

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta, \quad \frac{dr}{d\theta} = -\sin \theta$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta}$$

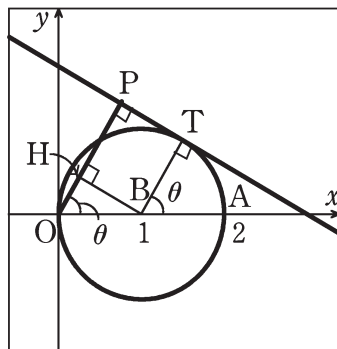
$$= \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} \quad \leftarrow \text{ここの部分が極座標系の長さ公式に}$$

$$= \sqrt{\sin^2 \theta + 1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta}$$

$$= \sqrt{2(1 + \cos \theta)}$$

$$= 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$$

よって、求める曲線の長さは



$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta &= \int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 4 \left[2 \sin \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi} = 8 \quad \dots\dots \text{㊦}\end{aligned}$$

@ このほうが、計算の見通しが遥かによい。なお、極座標系の面積公式、長さ公式が掲載されている参考書が少ないのは誠に残念。

オマケ

2018年大阪大学理系第3問には hypocycloid が出題されていた。媒介変数表示が似ている。

■大阪大学問題■

2つの関数

$$f(t) = 2\sin t + \cos 2t, \quad g(t) = 2\cos t + \sin 2t$$

を用いて定義される座標平面上の曲線

$$C: x=f(t), \quad y=g(t) \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

を考える。

(1) t が $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、 $f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ。

(2) t_1, t_2 を $0 \leq t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1) = f(t_2)$ を満たす実数とする。このとき、 $g(t_1)^2 - g(t_2)^2 > 0$ が成り立つことを示せ。

(3) C と直線 $x=1$ が囲む領域の面積 S を求めよ。

▲解答▲ (1) $f'(t) = 2\cos t - 2\sin 2t = 2\cos t(1 - 2\sin t)$

右の増減表により、 $t = \frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{3}{2}$ をとる。……㊦

$$\begin{aligned}g'(t) &= -2\sin t + 2\cos 2t = -2(2\sin^2 t + \sin t - 1) \\ &= -2(\sin t + 1)(2\sin t - 1)\end{aligned}$$

右の増減表により、 $t = \frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

……㊦ @ 易!

(2) 〔証明〕 $f(t_1) = f(t_2)$ のとき

$$2\sin t_1 + 1 - 2\sin^2 t_1 = 2\sin t_2 + 1 - 2\sin^2 t_2$$

$$\sin t_1 - \sin t_2 = \sin^2 t_1 - \sin^2 t_2$$

$\sin t_1 \neq \sin t_2$ であるから $\sin t_1 + \sin t_2 = 1$

$$g(t)^2 = \{2\cos t(1 + \sin t)\}^2 = 4(1 - \sin^2 t)(1 + \sin t)^2 = 4(1 - \sin t)(1 + \sin t)^3$$

であるから

$$\sin t_1 = s \text{ とおくと, } \sin t_2 = 1 - s, \quad 0 \leq t_1 < \frac{\pi}{6} \text{ より } 0 \leq s < \frac{1}{2} \quad \dots\dots \text{①}$$

t	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1

t	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$		+	0	−	
$g(t)$	2	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

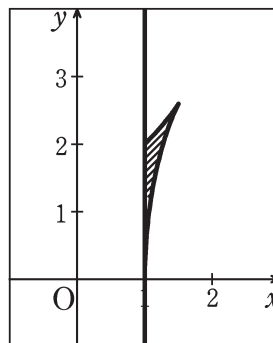
$$\begin{aligned}
 g(t_1)^2 - g(t_2)^2 &= 4(1-s)(1+s)^3 - 4s(2-s)^3 \\
 &= 4(1+2s-2s^3-s^4) - 4(8s+12s^2-6s^3+s^4) \\
 &= 4(1-6s+12s^2-8s^3) = 4(1-2s)^3 > 0 \quad (\because \textcircled{1} \text{より}) \quad \text{終}
 \end{aligned}$$

@ これは計算が重い。大阪大学受験者には無理か。点のプロットで概形をかけば十分かと。

(3) (1), (2) により, 曲線の概形は次の図。

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ のときの y を $y=g_1(t)$, $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ のときの y を $y=g_2(t)$ とすると

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^{\frac{3}{2}} g_1(t) dx - \int_1^{\frac{3}{2}} g_2(t) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} g(t) f'(t) dt - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} g(t) f'(t) dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) f'(t) dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos t + \sin 2t)(2\cos t - 2\sin 2t) dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^2 t - 2\cos t \sin 2t - 2\sin^2 t) dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + 2\cos 2t - 4\cos^2 t \sin t + \cos 4t - 1) dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos 2t + \cos 4t + 1 - 4\cos^2 t \sin t) dt \\
 &= \left[\sin 2t + \frac{1}{4} \sin 4t + t + \frac{4}{3} \cos^3 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \quad \dots\dots \text{終}
 \end{aligned}$$



@ (2) の重たい計算のあとでは, 体力の限界かと。試験会場では非常に厳しい。

研究 実際に, hypocycloid であることを検証してみよう。原点中心, 半径 3 の円に点 $A(3, 0)$ で内接する半径 1 の円を考える。内側の円が滑ることなく転がったときの初期状態で点 A にいた点の軌跡を求める。軌跡上の点を P とし, 内側の円の中心を C , $\angle xOC = \theta$ とおくと, 接点 Q に対して $\angle PCQ = 3\theta$ であるから

$$\overrightarrow{OC} = (2\cos \theta, 2\sin \theta)$$

$$\overrightarrow{CP} = (\cos(\theta - 3\theta), \sin(\theta - 3\theta))$$

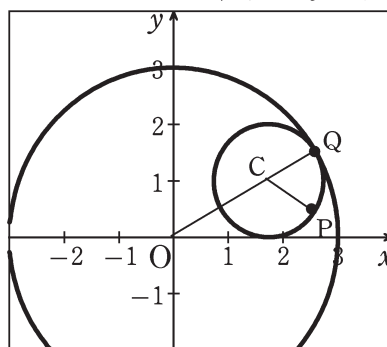
$$= (\cos 2\theta, -\sin 2\theta)$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$$

$$= (2\cos \theta + \cos 2\theta, 2\sin \theta - \sin 2\theta)$$

よって $P(2\cos \theta + \cos 2\theta, 2\sin \theta - \sin 2\theta)$

これが, 標準的な hypocycloid の媒介変数表示であるが,



大阪大学の問題は、優秀な受験生にばれないように(?) y 軸対称移動し、逆回転で始点も変更している。具体的には、 y 軸に関する対称点 $(-2\cos\theta - \cos 2\theta, 2\sin\theta - \sin 2\theta)$

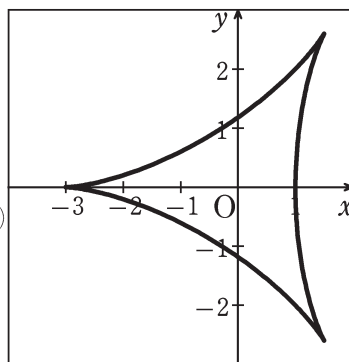
をとり、 $\theta - \frac{\pi}{2} = t$ とおくと、座標は

$$\left(-2\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - \cos 2\left(t + \frac{\pi}{2}\right), 2\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - \sin 2\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

すなわち $(2\sin t + \cos 2t, 2\cos t + \sin 2t)$ となり、大阪大学の問題と座標の媒介変数表示が完全に一致することがわかる。

@ これなら、かなり優秀な受験生でも、hypocycloid とは気づき

にくい。よくぞ工夫したが、普通の設定で $0 \leq t \leq \pi$ の範囲の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めさせたほうが入学者選抜としての弁別度があつたものを。残念であった。昨年度は物理で、今年度は数学で大阪大学関係者は猛省すべし。昨年度は神戸大学・理系数学の弁別度がなかった。入試問題に弁別度は非常に重要なことは言うまでもあらず。



4 東大理科第 5 問 (2) 単独のスーパー別解

■問題の単独化改題■ かように改題すると、難問かと

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする。点 $P(z)$ は C 上にあり、点 $A(1)$ とは異なるとする。点 P における円 C の接線に関して、点 A と対称な点を $Q(u)$ とし、 $w = \frac{1}{1-u}$ とおく。 C のうち実部が $\frac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分 C' 上を点 $P(z)$ が動くときの点 $R(w)$ の軌跡を求めよ。

▲極座標の考えによる簡単な解答▲

$\angle xAQ = \angle AOP = \theta$ ($-\pi < \theta \leq \pi$) とおくと、点 A から直線 OP に垂線を引くことにより

$$AH = 1 - \cos\theta$$

すなわち、点 A を極、半直線 Ax を始線とすると、点 Q は極方程式 $r = 2(1 - \cos\theta)$ を満たす。

これは、 $u - 1$ の極方程式に相当するので、 $1 - u$ の極方程式は

$$r = 2[1 - \cos(\theta + \pi)] \quad \text{すなわち} \quad r = 2(1 + \cos\theta)$$

$$w = \frac{1}{1-u} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \cos\theta} \quad \text{すなわち} \quad w + w\cos\theta = \frac{1}{2}$$

点 R の x 座標は、 $w\cos\theta (=x)$ であるから

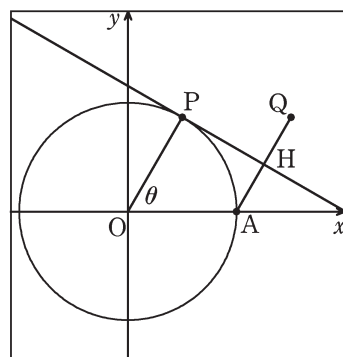
$$w - 0 = \frac{1}{2} - x$$

よって、 w は複素数平面上で原点と直線 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ から等距離に

ある。すなわち、これらをそれぞれ焦点、準線とする放物線上に存在する。条件の θ の値を $\theta + \pi$ に補正して

$$-\frac{1}{2} \leq \cos(\theta + \pi) \leq 1 \quad \text{よって} \quad \frac{1}{4} \leq w \leq 1$$

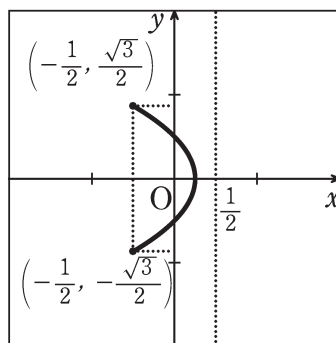
したがって、求める軌跡は次図の放物線の一部。……Ⓐ



@ 角の変換と範囲の補正は必要であるが、非常に単純。暗算でOK♪
京大なら、この形で出題したかも。なお、角の補正を回避するには
 $1-u$ の極方程式を

$$r = -2(1 - \cos \theta)$$

にするとよい。ただし、 $r < 0$ の形も許すものとする。



5 生徒への今後の指導について

新課程入試の目玉である複素数平面の問題が出題され続けることは間違いない。しばらくの間は、典型問題をまんべんなく演習し、準備しておけば一応大丈夫であろう。ただし、この分野が理系合否の鍵を握ることも間違いないので、微積分の計算の次に精度の高い完成度にもっていく必要がある。基礎になる三角関数の計算技術の完成も要求される。また、近い将来にはマンネリ化の影響で、図形問題を中心に高度な問題が増加することも予想される。例えば、曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ を原点の周りに $\frac{\pi}{4}$ 回転した曲線の方程式を求めるなど、この分野で学習指導要領に触れられていないような出題も十分ありうる。

超難関大学などでは特殊な訓練が要求されることも今後は大いに予想されるので、指導する側が日々研究することが第一に重要であるし、指導者の個人的な力量の差が出る分野であろう。それゆえ、教師冥利に尽きるしやり甲斐もあるというもの。皆さん、お互い謙虚に切磋琢磨いたしましょう。なお、本論文のスーパー解法は、すべて筆者の休日の遠距離ロードにおける思考の賜物。この永年の涙ぐましい日夜の鍛錬により、暗算能力は格段に進歩することができた。天賦の才に恵まれぬ筆者は、鈍牛の如く努力するのみ。最後になりましたが、読者諸賢のご精読と発表の機会をくださった編集委員の先生方に感謝いたします。

E-mail: yamakawa2005jp@yahoo.co.jp

参考文献

[1] 山川 宏史 「東大複素数平面問題の背景 ～多面的に探る～」

(『フォーカス・ゴールド通信第15号』啓林館、2018年6月)啓林館