

# 電 磁 誘 導

田 中 初 四 郎

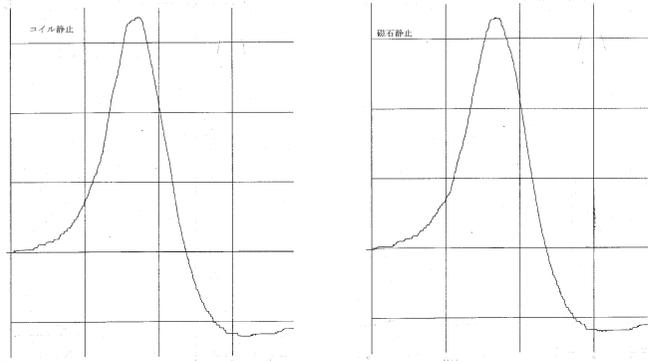
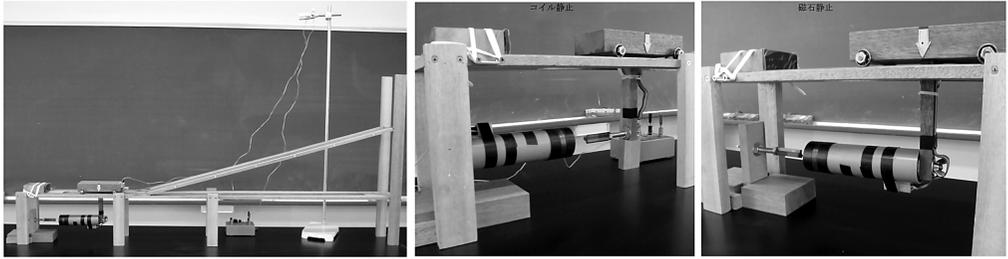


# 電磁誘導

田中初四郎

## 概要

A: 静止したコイルに磁石が近づく, B: 静止した磁石にコイルが近づく  
どちらも同じ電流がコイルに流れ、同じ起電力がコイルに生じる。起電力はコイルと磁石の相対速度のみで決まり、観測者に対してコイル・磁石のいずれが静止しているか、ともに動いているかに関係しない。しかし、起電力の原因はAでは磁場が時間的に変化することで生じる誘導電場<誘導法則>、Bでは磁場中を運動する電子に働くローレンツ力である。以前この事を実験で確かめる実験装置を作成し、相対速度が同じ場合、縦軸に起電力・横軸に時間のグラフは実験精度で一致したことを発表した。今回は異なる2種の法則を一つの形式にまとめたファラデーの誘導法則のポイントを確認し、起電力の原因について考察する。



## 1 電磁誘導とは

理化学辞典によると

1つの閉じた回路(2次回路)の近くで、電流の流れている他の回路(1次回路)または磁石を動かすとき2次回路に電流が流れる。また、もともと電流が流れていればその強さが変わる。1次回路を固定したままその電流を変えたり、あるいは2次回路の方を動かしたりしても同様のことがおこる。これは1831年ファラデーが発見した現象で、電磁誘導とよばれる。以上の種々の場合に共通なことは、2次回路を貫く磁束の量が変わる点である。磁束が変化している間、2次回路に起電力が生じたとみることができる。この起電力は常に磁束の変化を少なくするような電流を流す方向におこり、その大きさは回路

を貫く磁束の減少速度に比例する。磁束密度を  $\vec{B}$ 、回路 C を縁とする任意の面 S 上の微小面積  $dS$  に垂直な  $\vec{B}$  の成分を  $B_n$  として、磁束は

$$\Phi = \int_S B_n dS$$

である。ここで電場を  $\vec{E}$  とすれば、回路に生じる起電力は

$$V = \oint E_s ds$$

と書ける。 $ds$  は回路の微小要素の長さ、 $E_s$  は  $\vec{E}$  の  $ds$  方向の成分である。回路に向きを定めて、その向きの  $ds$  を正とし、かつその向きにまわした右ねじの進む向きに面 S を貫く  $B_n$  を正とする。そうすると上の法則は

$$\oint E_s ds = - \frac{d}{dt} \int_S B_n dS \quad (1.1)$$

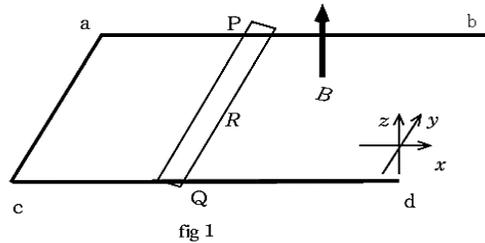
という形に表わされ、これをファラデーの誘導法則 (Faraday's law of induction) という。この法則は閉回路について成り立つだけでなく、空間内の任意の閉曲線とそれの張る任意の曲面について成り立つ。このことからマクスウェル方程式のうち

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

が導かれる。なお、電磁誘導の向きに関してレンツの法則がある。

ファラデーがどのように考えて電磁誘導を発見したかの詳細は文献 2 に譲ることにする。いずれにせよファラデーが電磁誘導を式 (1.1) にまとめられたのは「磁束」という物理量を使うことを思いついたからである。

## 2 磁束の変化



普通のコイルと磁石を扱うのは大変なので fig1 のように平面 acdb に垂直に一樣な磁束密度  $\vec{B}$  がかかっている設定で考える。この設定では  $B_n = B$  で、回路を貫く磁束  $\Phi$  は

$$\Phi = \int_S B_n dS = B \cdot S$$

となる。この磁束  $\Phi$  の時間的变化は

$$\frac{d}{dt} \Phi = S \cdot \frac{dB}{dt} \quad (S: \text{一定}) \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt} \Phi = B \cdot \frac{dS}{dt} \quad (B: \text{一定}) \quad (2.2)$$

の 2 通りがあり得る。

## 2.1 2次回路の面積 $S$ が一定で磁束密度 $\vec{B}$ が時間的に変化する

$\vec{a}\vec{c}=\vec{L}$  のとき、棒 PQ を  $\vec{a}\vec{P}=\vec{L}$  で固定し、磁束密度  $\vec{B}$  を時間的に変化させる。磁束の時間的な変化は式 (2.1) より

$$\frac{d}{dt}\Phi = L^2 \cdot \frac{dB}{dt} \quad (2.3)$$

となり、起電力は

$$\oint E_s ds = EL \cdot 4 \quad (2.4)$$

である。式 (1.1) に式 (2.3) と式 (2.4) を代入すると磁束密度  $B$  が時間的に変化すると回路に沿って

$$E = -\frac{L^2}{4} \frac{dB}{dt} \quad (2.5)$$

という誘導電場  $\vec{E}$  が発生することで、回路に起電力が生じる。このことはマクスウェル方程式 (1.2) を fig1 に適応した結果でもある。

## 2.2 2次回路にかかる磁束密度 $\vec{B}$ が一定で面積 $S$ が時間的に変化する

棒 PQ が辺  $ab \cdot cd$  に常に垂直で右向きに等速  $v$  に動く場合、磁束の時間的な変化は式 (2.2) より

$$\frac{d}{dt}\Phi = B \cdot \frac{dS}{dt} = B \cdot \frac{Lvdt}{dt} = BLv \quad (2.6)$$

となり、起電力は  $V = BLv$  で回路に流れる電流は  $I = \frac{V}{R} = \frac{BLv}{R}$  となる。

起電力の原因は

$$\oint E_s ds = E'L \quad (2.7)$$

であるから、式 (1.1) に式 (2.6) と式 (2.7) を代入すると棒 PQ に

$$E' = -\frac{BLv}{L} = -Bv \quad (2.8)$$

なる電場  $\vec{E}'$  が存在し、fig2 のようにこの電場によるクーロン力  $f_C$  が電子を Q から P にくみ上げ、起電力はこのクーロン力  $f_C$  によってもたらされる。

これは磁場  $\vec{B} = (0, 0, B)$  だけが存在する慣性系 K に対して速度  $\vec{v} = (v, 0, 0)$  の慣性系 K' では磁場以外に電場  $\vec{E}' = (0, -vB, 0)$  が存在することになる。電場と磁場は別物と思っていたのが誤りで電場と磁場をひとまとめにした電磁場が実体であることを示している。この関連は古典物理では記述できなくて特殊相対性理論によってはじめて理解できることが知られている。慣性系 K と K' がローレンツ変換

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{aligned}$$

で関係づけられるとき、電磁場は

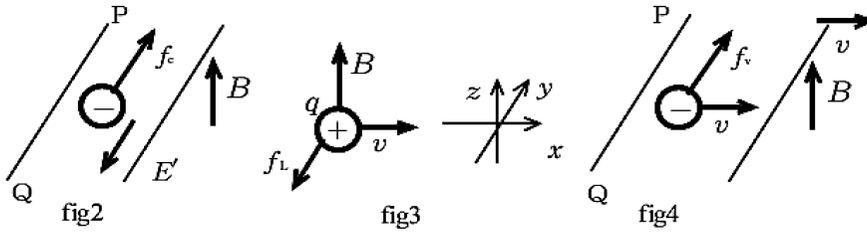
$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - vB_z) & B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) \\ E'_z &= \gamma(E_z + vB_y) & B'_z &= \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \end{aligned}$$

のように変換するので、 $\vec{B} = (0, 0, B)$ ,  $\vec{E} = (0, 0, 0)$  のとき上式群は

$$\begin{aligned} E'_x &= 0 & B'_x &= 0 \\ E'_y &= -\gamma v B & B'_y &= 0 \\ E'_z &= 0 & B'_z &= \gamma B \end{aligned}$$

となる。棒の移動速度  $v$  は光速  $c$  に比べて十分小さいので、 $\gamma = 1$  とし、慣性系  $K'$  には磁場  $\vec{B}' = (0, 0, B)$  だけではなく電場  $\vec{E}' = (0, -vB, 0)$  が存在することになり、式 (2.8) が導出される。

### 3 ローレンツ力



磁場  $\vec{B} = (0, 0, B)$  の慣性系  $K$  に対して  $\vec{v} = (v, 0, 0)$  で動く電荷  $q$  の粒子には fig3 のようにローレンツ力  $\vec{f}_L$

$$\begin{aligned} \vec{f}_L &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ &= (0, -qvB, 0) \end{aligned}$$

が働く。fig1 で棒 PQ が  $+x$  方向に  $v$  で動くことは、棒 PQ 内の自由電子には fig4 のようにローレンツ力  $\vec{f}_v$

$$\begin{aligned} \vec{f}_v &= (-e)\vec{v} \times \vec{B} \\ &= (0, evB, 0) \end{aligned}$$

が働くことになり、 $+y$  方向つまり Q から P に電子がくみ上げられる。これにより回路に起電力が生じる。

## 4 仕事と起電力

### 4.1 慣性系 $K$ から見て

fig4 のように棒 PQ が  $+x$  方向に  $v$  で動くとき、棒 PQ 内の電子も  $+x$  方向に  $v$  で動く。電子には  $+y$  方向にローレンツ力  $\vec{f}_v$  が働き、Q から P に動くことになる。回路に電流を流す起電力の原因はローレンツ力  $\vec{f}_v$  ということになる。この現象を仕事の観点で考えると

$$\text{起電力} \Rightarrow W_1 = eV$$

$$\text{ローレンツ力} \Rightarrow W_2 = evBL$$

となり、 $W_1 = W_2$  だから、起電力  $V$  が

$$V = \frac{W_1}{e} = \frac{W_2}{e} = \frac{evBL}{e} = vBL \quad (4.1)$$

と求められ、式 (2.6) と一致した結果が得られる。

## 4.2 棒PQの静止系

棒PQの静止系は慣性系Kに対して $+x$ 方向に $v$ で動く慣性系K'である。慣性系Kで磁場 $\vec{B} = (0, 0, B)$ 、電場 $\vec{E} = (0, 0, 0)$ は慣性系K'では $\vec{B}' = (0, 0, B)$ 、 $\vec{E}' = (0, -vB, 0)$ となる。ただし、 $c \gg v$ とする。

fig2のように慣性系K'では静止した電子にクーロン力 $\vec{f}_C = (-e) \cdot \vec{E}' = (0, evB, 0)$ が働き、このクーロン力 $\vec{f}_C$ により電子はQからPにくみ上げられ、回路に電流が流れる。クーロン力 $\vec{f}_C$ が起電力の原因と解釈できる。この現象を仕事の観点で考えると

$$\text{起電力} \Rightarrow W_1 = eV$$

$$\text{クーロン力} \Rightarrow W_3 = evBL$$

となり、 $W_1 = W_3$ だから、起電力 $V$ が

$$V = \frac{W_1}{e} = \frac{W_3}{e} = \frac{evBL}{e} = vBL \quad (4.2)$$

と求められ、式(2.6)と式(4.1)とも一致する。

## 4.3 ローレンツ力は仕事をするのか

4.1でローレンツ力が電子にする仕事から起電力を求めると話が自然になる。しかし、ローレンツ力は速度に常に垂直なので、「ローレンツ力は仕事をしない」。これを避けるために次のように説明する。

棒PQには定常電流が流れるのでfig5のように棒PQ内の電子に働く力がつり合う必要がある。Qに電子がくみ上げられることでQP間に電荷の偏りが生じ、QからPの向きに静電場 $E_s$ が発生する。この静電場 $E_s$ により電子には $-y$ 方向にクーロン力 $f_s$ が働く。力のつりあいの式は

$$f_v + f_s = 0$$

$$evB + (-eE_s) = 0$$

となり、 $E_s = vB$ が得られる。Qに対してPが $E_s L = vBL$ だけ高電位になり、fig1のPQcaPに電流が流れる。が、静電場 $E_s$ によるクーロン力 $f_s$ はPからQの向きで、電子をQからPにくみ上げる原因とは言えない。つまり、静電場 $E_s$ は起電力の原因ではない。

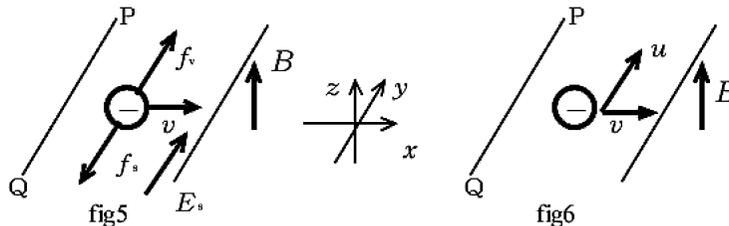


fig1で回路に定常電流が流れた状態では、fig6のように慣性系Kに対して、電子は $+x$ 方向に等速 $v$ 、 $+y$ 方向に等速 $u$ で動くことになる。つまり、電子の速度 $\vec{V}$ は $\vec{V} = (v, u, 0)$ である。電子に働くローレンツ力 $\vec{f}_L$ は

$$\begin{aligned} \vec{f}_L &= (-e)\vec{v} \times \vec{B} \\ &= (-e)(uB, -vB, 0) \\ &= (-euB, evB, 0) \end{aligned}$$

となる。電子が Q から P に達するのに要する時間を  $t_1$  とすると  $ut_1 = L$  となり、その間に棒 PQ は

$$vt_1 = v \frac{L}{u}$$

だけ +  $x$  方向に進む。ローレンツ力  $\vec{f}_L$  の  $x$  成分  $f_{Lx}$  のする仕事  $w_x$  は

$$w_x = f_{Lx}(vt_1) = (-euB) \cdot v \frac{L}{u} = -evBL \quad (4.3)$$

となり、 $y$  成分  $f_{Ly}$  のする仕事  $w_y$  は

$$w_y = f_{Ly}L = evBL \quad (4.4)$$

となる。ローレンツ力  $\vec{f}_L$  のする仕事  $w$  は式 (4.3) と式 (4.4) より

$$w = w_x + w_y = (-evBL) + evBL = 0$$

つまり、

$$\begin{aligned} \vec{f}_L \cdot \vec{V} &= (-euB, evB, 0) \cdot (v, u, 0) \\ &= (-evuB) + evuB \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり、ローレンツ力  $\vec{f}_L$  は仕事をしない。

$y$  成分  $f_{Ly}$  が仕事  $w_y = evBL$  をすることが起電力のする仕事に一致すると言うことは避けなければならない。このことはなめらかな斜面上で物体に働く垂直抗力のする仕事は 0 であるが、垂直抗力の水平成分のする仕事  $W_1$  と鉛直成分のする仕事  $W_2$  はどちらも 0 でないが、「垂直抗力の水平成分のする仕事  $W_1$ 」を取り出して議論しないことに留意すべきである。(ちなみに  $W_1 + W_2 = 0$  である)

#### 4.4 エネルギーの移り変わり

ローレンツ力がする仕事が 0 ということは、起電力がする仕事は何によってもたらされるのであろうか。fig1 で棒 PQ の +  $x$  方向の運動を考える。棒 PQ が等速  $v$  で動くと言うことは、棒 PQ の質量を  $m$  とし、運動方程式は

$$m \cdot 0 = F + (-F_A)$$

となり、電流が磁場から受けるアンペールの力  $F_A = IBL$  とつり合う外力  $F$  を加え続けることが必要である。電子が Q から P に達する時間  $t_1$  の間に外力  $F$  のする仕事  $W_F$  は

$$W_F = F \cdot vt_1 = IBL \cdot v \frac{L}{u}$$

となり、棒 PQ 中の電子の粒子密度を  $n$ 、断面積を  $S$  とすると、電流は  $I = enuS$  なので、

$$\begin{aligned} W_F &= enuS \cdot BL \cdot v \frac{L}{u} \\ &= enSvBL^2 \end{aligned}$$

である。棒 PQ 中にある電子数は  $N = nSL$  なので、

$$W_F = Ne \cdot vBL$$

となる。ローレンツ力  $\vec{f}_L$  の  $x$  成分の棒 PQ 内のすべての電子に対する仕事  $W_x$  は

$$W_x = N \cdot w_x = N \cdot (-evBL)$$

であり、 $W_F + W_x = 0$  となる。また、 $N \cdot w_x + N \cdot w_y = 0$  であるから、

$$\begin{aligned} |W_F| &= |W_x| = |W_y| \\ W &= W_F + W_x + W_y = Ne \cdot vBL \end{aligned}$$

となり、起電力のする仕事は外力のする仕事その原因である。電磁誘導は、力学的な仕事を電気エネルギーに変換する働きをする現象と言える。

ローレンツ力が仕事をすると考えるのが自然な電磁誘導の現象では次のように考えればよいことがわかった。

- 1) 起電力の原因と見なせるローレンツ力  $\vec{f}_v$  のする仕事  $W_v$  を求める。
- 2) ローレンツ力  $\vec{f}_v$  を導出する速度  $\vec{v}$  に垂直な速度  $\vec{u}$  が電流を担い、電子にはローレンツ力  $\vec{f}_u$  が働き、仕事  $W_u$  を行う。この時、 $W_u + W_v = 0$  である。
- 3) 運動を続けるためには  $\vec{F} + N \cdot \vec{f}_u = 0$  を満たす外力  $\vec{F}$  を加え続ける必要がある。外力  $\vec{F}$  のする仕事  $W_F$  は  $W_F = -W_u$  となる。
- 4) この運動を支えるのは外力  $\vec{F}$  であり、

$$W_F = -W_u = -(-W_v) = W_v$$

となり、ローレンツ力  $\vec{f}_v$  がする仕事  $W_v$  を求めれば起電力は

$$V = \frac{W_F}{Ne} = \frac{W_v}{Ne} = vBL \quad (4.5)$$

と求めることができる。

## 5 誘導法則

4.1 と 4.2 は慣性系間のローレンツ変換で処理できる。ところが、鉛直上向きに一樣な磁場  $\vec{B} = (0, 0, B)$  中を水平面内で一定の角速度  $\omega$  で回転する棒・円板による現象はそうはいかない。

### 5.1 棒の回転運動

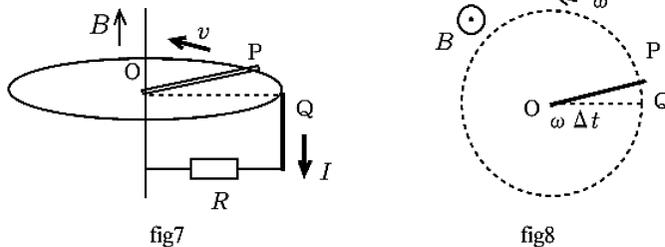


fig7 のような半径  $A$  の円形のレールに一端  $P$  が常に接し、他端が中心  $O$  の周りになめらかに水平面内で一定の角速度  $\omega$  で回転する棒がある。鉛直上向きに一樣な磁場  $\vec{B} = (0, 0, B)$  をかける。 $+z$  方向から見ると fig8 のようになる。

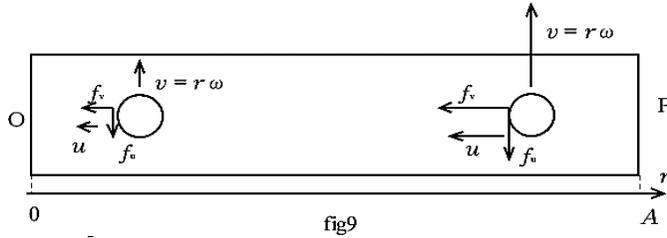
fig8 から基線OQに対して  $dt$  間に中心角  $\omega dt$  だけ回転する。棒OP描く面積  $dS$  は

$$dS = \frac{1}{2\pi} \cdot \omega dt \cdot \pi A^2 = \frac{1}{2} \omega A^2 dt$$

となる。式 (1.1) と式 (2.2) より棒OP間に生じる起電力の大きさ  $V$  は

$$V = B \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \omega BA^2 \quad (5.1)$$

と求めることができ、回路には  $I = \frac{V}{R} = \frac{\omega BA^2}{2R}$  の一定の電流がOからPに向かって流れる。



この現象を電子の速度と速度ごとのローレンツ力の分力について図示したのが fig9 である。O から  $r$  離れた点で電子は接線方向に  $v = r\omega$ 、法線方向にPからOに  $u$  の速度を持ちそれぞれに対するローレンツ力の分力

$$f_v = evB = er\omega B$$

$$f_u = euB$$

が働いている。ここで注目すべき事は、fig9 からわかるように  $f_u$  は  $r$  に関係し、 $u$  も  $r$  に関係して変わる。回路に流れる電流  $I$  が一定と言うことは電子密度  $n$  も  $r$  に関係して変わり、 $nu = \frac{I}{eS}$  が一定となる。(  $S$  は棒PQの断面積)

円形レールの接点Pから中心Oに電子がローレンツ力の分力  $f_v$  によりくみ上げられ、ローレンツ力の分力  $f_u$  のする仕事は

$$w_v = \int_A^0 er\omega B \cdot (-dr) = \int_0^A er\omega B \cdot dr = \frac{1}{2} e\omega BA^2 \quad (5.2)$$

となる。棒OPを一定の角速度  $\omega$  で回転させるには  $r$  における外力  $dF_r$

$$dF_r = (-f_u) \cdot nSdr = euB \cdot nSdr = enuS \cdot Bdr = IBdr$$

を加え続ける必要があり、全体として

$$F = \int_0^A dF_r = \int_0^A IBdr = IBA \quad (5.3)$$

となる。電子がOからPに達するのに要する時間を  $t_2$  とし、その間に外力がする仕事  $W_F$  は

$$W_F = \int_0^A dF_r \cdot r\omega t_2 = \int_0^A IBr\omega t_2 \cdot dr = \frac{1}{2} IB\omega t_2 A^2 = IBA \cdot \frac{1}{2} A\omega t_2 \quad (5.4)$$

で、その仕事率  $P_F$  は

$$P_F = \frac{W_F}{t_2} = \frac{1}{2} IB\omega A^2 = IBA \cdot \frac{1}{2} A\omega \quad (5.5)$$

となる。棒 OP の中央 ( $\frac{1}{2}A$ ) における接線方向の速度が  $\frac{1}{2}A\omega$  なので、式 (5.4) は外力  $F$  のする仕事が半径  $r$  の接線方向の速度  $v = r\omega$  が  $r$  で異なるなか棒の中央での速度を掛けたものになっている。抵抗にかかる電圧  $V$  - 式 (5.1) と流れる電流  $I$  の消費電力  $P$  は

$$P = IV = I \cdot \frac{1}{2}\omega BA^2 = \frac{1}{2}I B \omega A^2 \quad (5.6)$$

で、 $P_F = P$  となっている。

起電力の原因はローレンツ力  $f_v$  がした仕事  $w_v$  と考えられる現象である。真の原因は一定の角速度  $\omega$  で棒 OP を回転させる外力  $F$  がする仕事である。 $It_2 = Ne$  であることに留意し、4.4 のまとめにしたがい

$$\begin{aligned} W &= W_F + W_v + W_u \\ W_v + W_u &= 0 \\ |W_F| &= |W_v| = |W_u| = N |w_v| = Ne \cdot \frac{1}{2}\omega BA^2 \\ W &= Ne \cdot \frac{1}{2}\omega BA^2 \end{aligned}$$

となり、起電力  $V$  は

$$V = \frac{W_F}{Ne} = \frac{W_v}{Ne} = \frac{1}{2}\omega BA^2 \quad (5.7)$$

と求めればよい。当然、式 (5.1) と一致した結果が得られる。

## 5.2 円板の回転運動

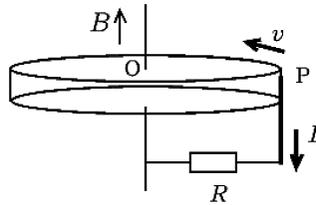


fig10

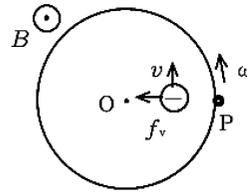


fig11

fig10 のような一様な厚さ  $\tau$  で半径  $A$  の金属円板を鉛直上向きに一様な磁場  $\vec{B} = (0, 0, B)$  中を水平面内で一定の角速度  $\omega$  で回転させる。 $+z$  方向から見ると fig11 のようになる。

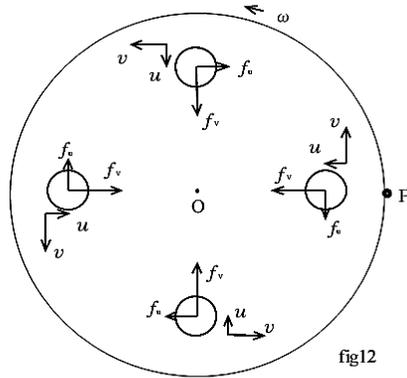
fig11 からこの現象では磁束の時間的変化を考える事はできない。が、円板の周囲から中心  $O$  に電子がローレンツ力の分力  $f_v$  によりくみ上げられ、 $O$  から円板の周囲に電流が流れる。この現象を電子の速度と速度ごとのローレンツ力の分力について図示したのが fig12 である。 $O$  から  $r$  離れた点で電子は接線方向に  $v = r\omega$ 、法線方向に  $P$  から  $O$  に  $u$  の速度を持ちそれぞれに対するローレンツ力の分力

$$\begin{aligned} f_v &= evB = er\omega B \\ f_u &= euB \end{aligned}$$

が働いている。中心  $O$  と接点  $P$  を結ぶ線上で  $O$  から  $r$  にある電子の速度は  $v = r\omega$  で磁場から中心  $O$  に向かうローレンツ力の分力  $f_v = evB = er\omega B$  を受け、電子は円板の周囲から中心  $O$  にくみ上げみ上げられる。ローレンツ力の分力  $f_v$  のする仕事は

$$w_v = \int_A^0 er\omega B \cdot (-dr) = \int_0^A er\omega B \cdot dr = \frac{1}{2}e\omega BA^2 \quad (5.8)$$

となる。



ここで、注目すべき事は電子は金属円板全体を動き、 $f_u$  は  $r$  に関係し、 $u$  も  $r$  に関係して変わる。回路に流れる電流  $I$  が一定と言うことは電子密度  $n$  も  $r$  に関係して変わり、 $nu \cdot \tau 2\pi r = \frac{I}{e}$  が一定となる。金属円板を一定の角速度  $\omega$  で回転させるには半径  $r$  における外力  $dF_r$  は

$$dF_r = (-f_u) \cdot ndv = euB \cdot n(\tau 2\pi r dr)$$

となる。回路を流れる電流  $I$  は、

$$I = enuS = enu \cdot \tau 2\pi r$$

なので、

$$\frac{dF_r}{I} = \frac{euB \cdot n\tau 2\pi r dr}{enu \cdot \tau 2\pi r} = Bdr$$

である。電子がOからPに達するのに要する時間を  $t_2$  とし、その間に外力がする仕事  $W_F$  は

$$W_F = \int_0^A dF_r \cdot r\omega t_2 = \int_0^A IBdr \cdot r\omega t_2 = \frac{1}{2} IB\omega t_2 A^2 \quad (5.9)$$

で、その仕事率  $P_F$  は

$$P_F = \frac{W_F}{t_2} = \frac{1}{2} IB\omega A^2 \quad (5.10)$$

となる。抵抗にかかる電圧  $V$  と流れる電流  $I$  の消費電力  $P$  は  $P = P_F$  である。

起電力の原因はローレンツ力  $f_v$  がした仕事  $w_v$  と考えられる現象である。真の原因は一定の角速度  $\omega$  で棒 OP を回転させる外力  $F$  がする仕事であり、 $It_2 = Ne$  であることに留意し、4.4のまとめにしたがい

$$\begin{aligned} W &= W_F + W_v + W_u \\ W_v + W_u &= 0 \\ |W_F| &= |W_v| = |W_u| = N |w_v| = Ne \cdot \frac{1}{2} \omega BA^2 \\ W &= Ne \cdot \frac{1}{2} \omega BA^2 \end{aligned}$$

となり、起電力  $V$  は

$$V = \frac{W_F}{Ne} = \frac{W_v}{Ne} = \frac{1}{2} \omega BA^2 \quad (5.11)$$

と求めればよい。式 (5.1) と式 (5.11) は同じ値で、磁束密度  $B$  と角速度  $\omega$  が同じなら長さ  $A$  の棒と半径  $A$  の円板で同じ起電力が生じることがわかった。

## 6 まとめ

5.1, 5.2 で棒・円板が静止した観測者 $K''$ で電磁場がどうなるかは $K''$ 系が加速度系であるために手に負えない。文献3によると慣性系では電磁場 $\vec{E}, \vec{B}$ がマクスウェル方程式

$$\text{I} : \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{II} : \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{III} : \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \text{IV} : \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \quad (6.1)$$

により $\vec{E}$ と $\vec{B}$ の振る舞いが決まる。慣性系 $K$ に対する速度 $\vec{v}$ の電子にはローレンツ力

$$\vec{f} = (-e)\vec{E} + (-e)\vec{v} \times \vec{B}$$

が働き、電子は運動方程式

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}$$

にしたがい運動する。この電子の運動を考慮し、式(6.1)で $\vec{E}$ と $\vec{B}$ の振る舞いが決まるというのが古典電磁気の考えである。

ファラデーは「磁束」という物理量を考える事で5.2の円板以外の磁場が関与して電流が流れる現象を説明できる誘導法則を見出した。ローレンツ力が電子をくみ上げることで電流が流れることが起電力の原因と考えられる現象では外力がする仕事が起電力のする仕事になっている。外力がする仕事 $W_F$ と電子をくみ上げるローレンツ力のする仕事 $W_v$ は $W_F = W_v$ である。起電力 $V$ は電子をくみ上げるローレンツ力のする仕事 $W_v$ を計算し、関与する電子の数を $N$ としたとき

$$V = \frac{W_v}{Ne} \quad (6.2)$$

で求めればよい。

### 参考文献

- [1] 『理化学辞典 第5版』(岩波書店, 1998年)
- [2] 江沢 洋著, 『現代物理学』(日本放送出版協会, 1988年)
- [3] 砂川 重信著, 『理論電磁気学 第2版』(紀伊國屋書店, 1973年)