岡山朝日研究紀要

The Asahi Bulletin (40)

第40号
2019.3

目　　次

私の制作 …… 河　本　昭　政（1）

興味・関心を高め、思考力・表現力などを高める実践例
…… 田　中　広　矛（3）

東大複素数平面問題を多面的に探る
…… 山　川　宏　史（11）

電磁誘導 …… 田　中　初四郎（19）

研究紀要バックナンバーの紹介

後柏原天皇主催着到和歌の特徴
― 永正三年と永正十六年の着到和歌を事例に ―
…… 辰　田　芳　雄（1）

新見荘代官祐成の中間太郎衛門について
…… 辰　田　芳　雄（69）

岡山県立岡山朝日高等学校
Okayama Asahi Senior High School

改組新第５回日展　特選「室内」（H30）

私の制作

河本昭政

この度、改組新第五回日展において二度目の特選を受賞しました。二十歳で本格的に展覧会に出品をはじめ、四十年来夢見た目標が現実となりました。夢は、強く思い続ければ叶うものだと改めて思いました。

今回の作品は、なにげないテーブルと女性の組み合わせですが、単なる説明に終わらず、「少しでも詩情がにじみ出るように」との一心で描きました。

まだまだ未熟で課題は多いですが、これを折り返し地点と考え、あと四十年（百歳になりますが…）ゆっくりと理想の絵に近づけるよう精進していこうと思います。

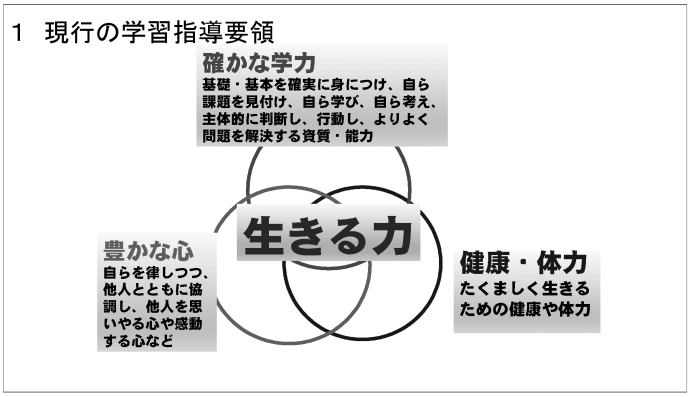
作品寸法

縦一六八cm　横一三七cm　奥行六cm　　F一〇〇号

興味・関心を高め、思考力・表現力などを高める実践例

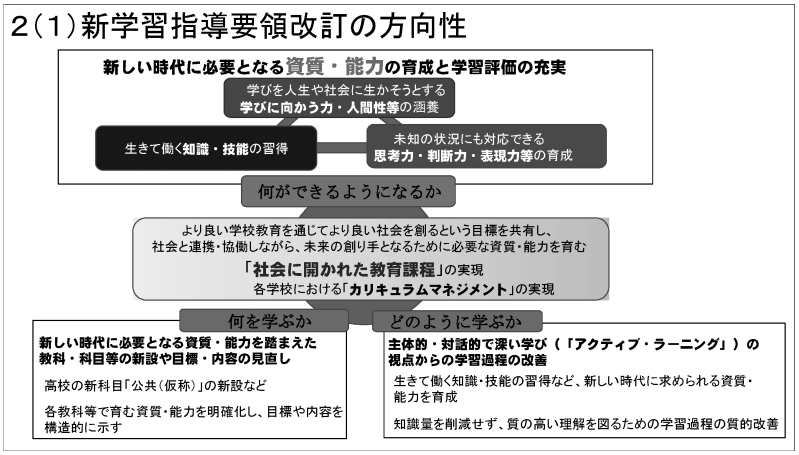
校　長　　田　中　広　矛

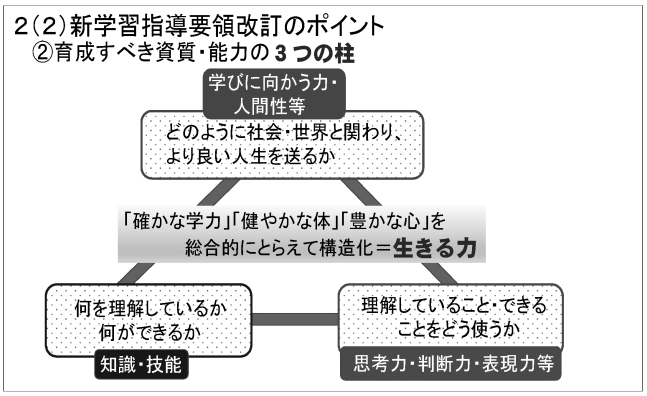
現在の社会は、グローバル化の進展や人工知能の進化などにより、「予測困難な時代」が到来すると言われている。そのため、これからの学校教育には、①子どもたちが様々な変化に積極的に向き合い、他者と協働して課題を解決していく力、②様々な情報を見極めて再構成し、新たな価値観につなげていく力、などを育成することが求められている。



このような時代の要請を受けて新学習指導要領は、知識及び技能の習得と思考力・判断力・表現力等の育成のバランスを重視する現行の学習指導要領の枠組みや教育内容を維持したうえで、知識の理解の質をさらに高め、確かな学力を育成することを目的に改訂された。

今回の改訂では、「生きる力」を子どもたちに育むために「何のために学ぶのか」という各教科等を学ぶ意義を共有しながら、授業の創意工夫等を引き出していくことができるようにしている。そのため、全ての教科等の目標及び内容を「知識及び技能」「思考力・判断力・表現力等」「学びに向かう力・人間性等」の資質・能力の３つの柱で再整理している。





その際重要なのが、優れた教育実践に見られる普遍的な視点である「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善

である。子どもたちがこれからの時代に求められる資質・能力を身につけ、生涯にわたって主体的・能動的に学び続けることができるようにするためには、学習の質をより一層高める授業改善を図らなければならない。

以上のような状況において、本校でも学校グランドデザインを作成し、それをもとに各教科で様々な授業改善に向けて研究を行っている。

昭和の終わりから平成にかけての時代には、上述したような概念はなかった。しかし、歴史は暗記科目だという認識を持つ生徒が多く、「何とか日本史に興味・関心を持たせたい、論理的に考えさせたい、理解させたい。」という思いから、『脱暗記・考える日本史』を標榜して、試行錯誤を繰り返しながら様々な工夫を行った。

そこで、かつて私が行っていた拙い授業の工夫をいくつか紹介してみたい。そもそも私は、岡山県の教員採用試験を「倫理」で受験して合格した。しかし倉敷南高校に赴任した際、「倫理なんて専門家もいないし、授業もない。日本史・世界史・地理のどれかをやれ。」と言われ、高校時代に得意だった日本史を選択した。初めて日本史を中心に教えるようになり、プリントづくりや教材研究等々で、寝る間もないくらい毎日が多忙であった。何とか１年生・１年生・２年生・３年生と担任し、「さあ、２巡目だ。」と思ったら、岡山朝日高校に異動。

当時の朝日高校は、日本史の教員が４名で、私以外は日本史の専門家ばかりであった。倉敷南高校時代も含め、「自分は日本史が専門ではないから」という甘えは許されない。専門家であろうがなかろうが、生徒･保護者が求める結果を出さなければ申し訳ない。もちろん、自分なりに一生懸命勉強したが、一朝一夕に知識量が増えるわけではない。色々と悩んだあげく、「そうだ。生徒は頭がいいんだから、授業でおもしろい・楽しいと思わせることができれば、自分で調べてみるだろう。自分で行ってみるだろう。また、同じ勉強時間でも、楽しいと思って勉強するのと嫌々するのでは成果も違うはずだ。今の私の知識量では、専門家には勝てないから、教えてやろうではダメなんだ。一緒に勉強していこう。」ということに思い至ったことが始まりであった。そこから、私なりの様々な工夫が始まった。

《私の実践例》

１　授業での約束

（１）必ず立って答える。「わかりません」はNG ！

最初の授業で、『授業では、カードを使ってどんどん発問するから、指名されたら必ず立って答える。座って発言するのは、匿名と同じで無責任になるかもしれない。だから立って、みんなに自分が発言していることを示したうえで、責任を持っ

た発言をする。人を誹謗中傷するような発言や「分かりません」はＮＧ。分からないから授業をしているのであって、間違っても恥ずかしいと思わず答える。』という約束をしておく。そうしておくと、生徒は自分なりに考えて答えるので、それを手がかりにどんどん発問を繰り返し、考えを深めていくことができる。その際重要なのは、間違っても決して叱ったり馬鹿にしたりしないということである。もし叱ってしまうと、次から恥ずかしがったり恐れたりして、なかなか発言をしなくなる恐れがある。自由に発言できる雰囲気を作ることが大切である。

（２）生徒を授業に参加させる。

教員：「君たちは、楽しい授業がいいか？つまらない授業がいいか？」

生徒：「楽しい授業がいい。」

教員：「じゃあ、みんな頑張れよ。」

生徒；「え？先生が頑張るんじゃないんですか？」

教員：「違う。例えば先生がエピソードか何か言ったときに、それがどうしたんなら、という態度をとられると、先生は二度とこのクラスではそういうことは言うまい、と決心する。でも、パッとみんなが反応したら、もう一つ言ってやろうかと思う。どっちがいい？」

生徒：「そりゃあ、後者の方です。」

教員：「だから君たちが頑張るんだよ。」

という約束をしておくと、生徒はしっかり聞いて反応しようとする。つまり、生徒が積極的に授業に参加しようとする。時には、笑うべき時ではないときに生徒全員が笑い、「今のは笑うとこじゃない！」と言ってまた全員で爆笑するような場面もあり、非常にいい雰囲気で授業ができるのである。

２　興味・関心を高め、論理的な思考方法・表現力などを高める工夫

（１）写真や現地で仕入れた教材など

京都や奈良など、自分で行って撮ってきた写真や、そこで仕入れた教材に使えそうな物を見せる。仮に、図説などに掲載されている写真であっても、その時のエピソードなどを交えながら説明すると、生徒は喜んでよく聞き見てくれる。

卒業生が、大学生や社会人になってから、「太宰府に行って撮った飛梅写真です。授業で使ってください。」などと送ってきてくれた写真も、たくさんある。これは、新学習指導要領が示している『生涯にわたって主体的・能動的に学び続ける』一例であろう。

（２）歌の導入

授業内容に即した「歌」、例えば桜田門外の変の後に流行った幕末の数え歌、明治の殖産興業で「炭坑節」、等々の歌を歌う。あるいは、詩吟やＣＤなどを聞かせる。そうすることで、その場面をイメージしたり想起したりして、記憶の定着も深まるのである。

（３）意味を考えて理解する

〇教卓に上がって、アグラをかいてみせる。

教員：「これは何かな？」

生徒：「アグラ。」

教員：「そう。足を組む、つまり右足と左足を組むので、跏と書く。」

〇次に、足を解いて、教卓から片足を垂らしてみせる。

教員：「これは？」

生徒：「アグラを解いて、片足を垂らした。」

教員：「そう。片方の足だけを垂らしたので、半という字を跏の上に書く。」

〇今度は、右手を曲げて指先をアゴにつけ、考えるようなポーズをとる。

教員：「じゃあ、これは？」

生徒：「ロダン、考える人。」

教員：「そうそう。物思いにふけったり考えたりすることを、難しい言葉で思惟と言う。だから、こういうポーズをしている仏像を、半跏思惟像と言うんだ。だから、仏像でも何でも、ただ丸暗記するのではなく、意味を考えて理解する必要があるんだよ。」

と、興味・関心を高めるだけでなく、論理的な思考の重要性を理解させる。

（４）本物を見せる

地の利を活かして、操山の横穴式石室の見学や県立博物館等の見学などなど、本物を見る機会を可能な限り設ける。

また、レプリカではなく、本物の地券・鐚銭・貨幣・藩札・召集令状・三国干渉を報じた山陽新報の記事（山陽新聞の前身）などを知り合いから戴いたり、自腹を切って買ったりして集め、実物を見せ触れさせる。

ちなみに、色々な物を見せて授業をしていると、「家の長櫃の裏に貼ってありました。先生が好きだと思って持ってきました。」と言って、三国干渉を報じた山陽新報（山陽新聞の前身）を、生徒が持ってきてくれたものである。また、古銭なども、多くの生徒が寄贈してくれた。

（５）論理的思考を鍛える

初めての授業の冒頭で、等差数列を板書して一緒に考え、公式を導き出す。そう

することで、数学の公式だけを丸暗記する、日本史の事件名だけを覚えるのではなく、なぜその公式が成り立つのか、なぜその事件が起こり後にどういう影響を与えたのか等々を理解することの重要性を認識させる。つまり、単なる暗記だと、忘れたらおしまいなのである。重要なのは、忘れても思い出す方法を身につけさせることである。しかも、数学や日本史のみならず、全ての教科・科目で論理的な思考が必要とされる。数学で帰納法・演繹法・弁証法などを学ぶように、哲学でも同じものを学ぶ。数字で表すか、言葉で表すかの違いだけで、論理的な思考は全てに共通して重要なのである。

例えば、多くの生徒は平安京遷都を「鳴くよウグイス平安京」と覚えている。たしかに、平安京はウグイスの名所として有名である。しかし、この覚え方だと単なる語呂合わせで、７９４年に平安京へ遷都されたということしか理解していない可能性が高い。だから、私は「泣くよ坊さん平安京」と教えることにしている。これを言うと生徒は笑うが、この覚え方だと、「坊さんって誰だったかな？ああ、道鏡だ。なぜ道鏡が泣くのかな？」などという疑問の中で、

〇孝謙女帝（重祚して称徳天皇）が道鏡を登用

→　道鏡を中心とした僧侶政治が始まる

→　皇族・貴族が権力を奪われる

→　桓武天皇の時代に、皇族・貴族が権力を取り返そうとする

→　長岡京に遷都

→　造長岡宮使・藤原種継暗殺

→　和気清麻呂の進言で平安京に遷都

→　道鏡が実権を奪い返される

→　泣くよ坊さん平安京（７９４年）

というように、一連の知識が結びついて、遷都の理由や背景などが理解しやすくなる。仮に忘れても、その様な思考をすることで思い出しやすくなる。つまり、重要なのは精緻化と論理的思考方法を身につけさせることである。

（６）発問の工夫

覚えているかどうかのような発問は極力控え、「〇〇はなぜ起こったのか？」「△△は日本経済にどのような影響を与えたのか？」「××のようなとき、自分だったらどうするか？」等々、生徒に考えさせる発問をする。さらに、その解答に対して「なぜ？なぜ？」を連発し、生徒の考えを一層深めていくことが重要だと考える。

（７）論述指導の工夫

東大・京大・筑波大などの２次試験で、日本史を使って受験する生徒を集めて

論述の指導（問題演習など）をしていたところ、

教員：「なぜ○○という条件がないのか？」

生徒：「すみません。思いつきませんでした。」

教員：「○○について答える問題で、なぜ△△を書いたのか？」

生徒：「すみません。」

というような会話が続き、「こいつら、全然分かってないな。」ということに思い至った。

そこで、前もって問題の解答を書かせ、他の生徒の解答を全員にコピーして配布し、順番を決めて生徒に司会進行をさせ、自分たちだけで議論するように改めた。そして、自分たちの解答をまとめることができた段階で、初めて私が指導・講評をするという形式で展開した。

私に指摘されたときは「すみません。」と答えていた生徒も、友達から「何でこんなことを書いたのか？」と指摘されると、つい悔しくて色々と反論する。しかし、やがて論理が破綻し、自分の考えを否定されるに至る。すると、次に書くときには「あいつがまたこんなことを言うかもしれない。」と考え、理論武装して書くようになる。最初は言い合いになったり、ケンカの寸前になったりしていたが、徐々に慣れて意見の交換ができるようになり、回数を重ねるごとに精度も上がり、問題集の解答例より素晴らしい解答が書けるようになった。

この方法だと、先生から言われたことを丸暗記するのではなく、生徒同士の議論を通して人の意見を聞く、自分の意見を論理的に説明する、自分にはなかった広い視点から物事を深く考える、等々の様々な資質・能力が身につきやすい。実際、「この講義で力がついた。」と東大文Ⅰに現役合格した生徒が受験雑誌に投稿したこともあった。

（8）課題の工夫

長期休業中の課題を、単に問題集の○ページから○ページまでの問題を解くような課題は極力避け、「造山古墳に行って、見てきた証拠を提出」とか、「既習の内容で歴史新聞を作成させて文化祭で展示し、観覧者に投票して貰い表彰する」、「歴史上の人物の業績を、班ごとにロールプレーで表現する」などの課題を与えた。これらは、生徒の興味・関心を高めるとともに、本物を実際に見ることの大切さや歴史の概要をうまく掴んで表現する力の育成をねらったものである。

また、既習のテーマをいくつか与え、自分でそれに関する試験問題を作成させた。「これはこの事件の中ではどうでもいいことだ。それよりもこっちの方が事件のキーポイントになるから、こっちを問おう。じゃあ、どういう風に問おうか？」など

と考えることで、要点を押さえた勉強をすることが可能になる。

以上、私の拙い工夫の一例を紹介させていただいたが、当時は、「アクティブラーニング」とか「主体的・対話的で深い学び」などという言葉は誰も知らなかった。しかし、どの先生も生徒の興味・関心を引き出し、発問などを通して思考力を鍛え、社会で活躍・貢献する人間を育てるために様々な工夫を凝らしてきた。

それは、まさに今回の学習指導要領で述べられている『優れた教育実践に見られる普遍的な視点である「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善である。子どもたちがこれからの時代に求められる資質・能力を身につけ、生涯にわたって主体的・能動的に学び続けることができるようにするためには、学習の質をより一層高める授業改善を図らなければならない。』という改訂の方向性と同じなのである。つまり、現在盛んに叫ばれている「アクティブラーニング」とか「主体的・対話的で深い学び」は、何も新しいことではない。重要なことは、それらの概念をしっかり理解して授業実践を行うことだと思う。

《参考文献》

「新学習指導要領の趣旨とポイント」（岡山県総合教育センター）

「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）」（平成 28 年 12 月 21 日中央教育審議会）

東大複素数平面問題を多面的に探る

山　川　宏　史

1 はじめに

大学入試では，近年複素数平面の問題が大幅に増加した。特に図形への応用分野の問題の出来が合否の大きな分かれ目となっている。一昨年に引き続き，東大複素数平面の問題の背景について考察を加えてみることにした。なお，東大では 2016 年から 3 年連続でこの分野が出題され，頻出分野となっていることも特筆される。本気で志望している者は，この分野でも是非高得点を。

2 東大理科第 5 問について

■問題■

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする。点 $\mathrm{P}(z)$ は C 上にあり，点 $\mathrm{A}(1)$ とは異なるとする。点 P における円 C の接線に関して，点 A と対称な点を $\mathrm{Q}(u)$ とする。$w=\dfrac{1}{1-u}$ とおき，w と共役な複素数を $\overline{w}$ で表す。

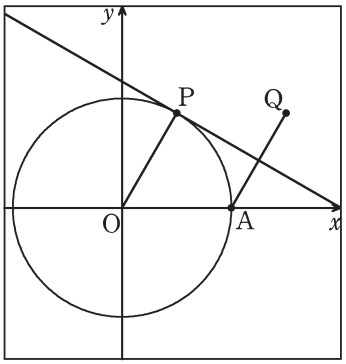
(1) u と $\dfrac{\overline{w}}{w}$ を z についての整式として表し，絶対値の商 $\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}$ を求めよ。

(2) C のうち実部が $\dfrac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする。点 $\mathrm{P}(z)$ が C' 上を動くときの点 $\mathrm{R}(w)$ の軌跡を求めよ。

▲複素数平面を全面に出した解答▲

(1) 接線方向を表す複素数は，z を原点の周りに $-\dfrac{\pi}{2}$ 回転した $\dfrac{z}{i}$ である。また，接線に関して点 A と点 Q は対称であるから，$\dfrac{u-z}{\frac{z}{i}}$ と $\dfrac{1-z}{\frac{z}{i}}$ は互いに共役な複素数である。　← 発想は厳しいか？

$$\frac{u-z}{\frac{z}{i}}=\frac{1-\overline{z}}{\frac{\overline{z}}{-i}} \qquad u-z=-z\cdot\frac{1-\overline{z}}{\overline{z}} \qquad u-z=-z\cdot\frac{z-z\overline{z}}{z\overline{z}}$$



$z\overline{z}=1$ であるから　$u-z=-z(z-1)$

したがって　$u=2z-z^2$　……答　@ やや易！

また　$w=\dfrac{1}{(z-1)^2}$ であるから

$$\frac{\overline{w}}{w}=(z-1)^2\cdot\frac{1}{(\overline{z}-1)^2}$$

$$=(z-1)^2\cdot\frac{z^2}{z^2(\overline{z}-1)^2}=z^2 \quad \cdots\cdots\text{答} \qquad @ \text{ この設問は，ありがたい誘導と次でわかる。}$$

よって　$\dfrac{w+\overline{w}-1}{w}=1+z^2-(z-1)^2=2z$　…… ①

したがって　$\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}=2|z|=2$　……答　@ この設問は，(2) のための準備

(2) (1) の最後の式の分母を払って両辺を 2 で割ると

$$\left|\frac{w+\overline{w}}{2}-\frac{1}{2}\right|=|w-0|$$　← この式変形ができれば，定義により放物線はすぐ出る。

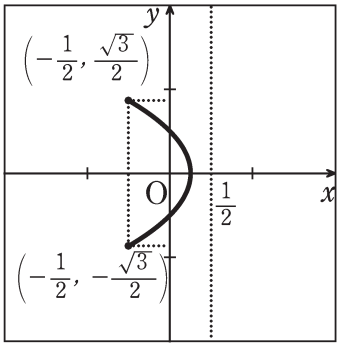
よって，w は複素数平面上で原点と実部が $\dfrac{1}{2}$ の複素数を表す直線から等距離にある。すなわち，これらをそれぞれ焦点，準線とする放物線上に存在する。題意より

$$\frac{2}{3}\pi\leqq\arg(z-1)\leqq\frac{4}{3}\pi$$

$w=(z-1)^{-2}$ であるから　$-\dfrac{8}{3}\pi\leqq\arg w\leqq-\dfrac{4}{3}\pi$

角を補正して　$-\dfrac{2}{3}\pi\leqq\arg w\leqq\dfrac{2}{3}\pi$

よって，求める軌跡は右図の放物線の一部。……答



@ (2) では，偏角の変換で範囲を求める操作がポイント。なお，$w=x+yi$（x，y は実数）とおく方法は次のとおり。偏角も用いない解法で掲載しておく。ただし，計算が長く，特に実部の条件を直すのは大変で大損ゆえ，お奨めできない。

C' 上の点が満たすべき条件は

$$\frac{z+\overline{z}}{2}\leqq\frac{1}{2}$$　すなわち　$z+\overline{z}\leqq1$

① を用いると　$\dfrac{\overline{z}(w+\overline{w}-1)}{2w}+\dfrac{\overline{w}+w-1}{2\overline{w}}\leqq1$

両辺を $2w\overline{w}$（>0）倍して　$w^2+\overline{w}^2+2w\overline{w}-w-\overline{w}\leqq2w\overline{w}$

よって　$w^2+\overline{w}^2-w-\overline{w}\leqq0$，$w\neq0$

ここで，$w=x+yi$（x，y は実数）とおくと

$$x^2+2xyi-y^2+x^2-2xyi-y^2-(x+yi)-(x-yi)\leqq0$$

よって　$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-y^2\leqq\dfrac{1}{4}$ …… ②

また，$|z|=1$ より　$\left|\dfrac{w+\overline{w}-1}{2w}\right|=1$　$|w+\overline{w}-1|=2|w|$

よって　$|2x-1|=2\sqrt{x^2+y^2}$

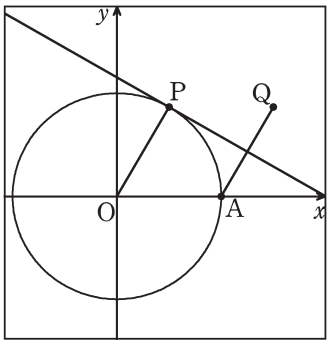
両辺は 0 以上であるから，2 乗して整理すると　$y^2=-x+\dfrac{1}{4}$ …… ③

② の範囲において ③ が求める軌跡で，次の放物線の一部である。

$$y^2=-x+\frac{1}{4}\quad\left(-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{4}\right)$$ ……答　（図略）

なお，参考書によっては，そっくり問題「$|z|=1$ のときの $\dfrac{2}{(z+1)^2}$ の軌跡」が，収録されている本もある。近畿大学の過去問で，もちろん答えは放物線に。やはり，この性質は知っている人は知っているのか。筆者は，またも勉強不足を実感。今宵も枕を濡らして反省を。

▲(1) の偏角を設定するお奨め解答▲



点 P における接線と直線 AQ との交点を H とし

$z=\cos\theta+i\sin\theta$ ($-\pi<\theta\leqq\pi$) とおくと

$$\angle\mathrm{OPA}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2},\quad \angle\mathrm{APH}=\frac{\pi}{2}-\angle\mathrm{OPA}=\frac{\theta}{2}$$

2 点 A，Q は直線 PH に関して対称であるから

PA＝PQ，$\angle\mathrm{APH}=\angle\mathrm{QPH}$

よって，$\angle\mathrm{APQ}=\theta$ となり，点 A を点 P を中心に θ だけ回転した点が Q になるから

$u-z=(1-z)z$　　$u=-z^2+2z$ ……答　（これは $\theta<0$ のときも成り立つ。）

@ これぞ，複素数の醍醐味。この図形的考察から，次のスーパー別解が生まれる。

▲(1) のスーパー別解▲

直線 OP と接線 ℓ は点 P で直交するので，点 A の直線 OP に関する対称点 A'(z^2) と点 Q は点 P に関して対称である。よって

$$z=\frac{z^2+u}{2}\quad \text{ゆえに}\quad u=2z-z^2\quad \cdots\cdots\text{答}$$

@ 何と簡単，瞬殺とはこのこと。筆者は完解認定と思うが，読者諸賢のご意見は如何に。

3 東大理科第 5 問 (1) の媒介変数表示の考察

▲極座標による解答▲

$\angle x\mathrm{AQ}=\angle\mathrm{AOP}=\theta$ ($-\pi<\theta\leqq\pi$) とおくと，点 A から直線 OP に垂線を引くことにより

AH＝1−cosθ

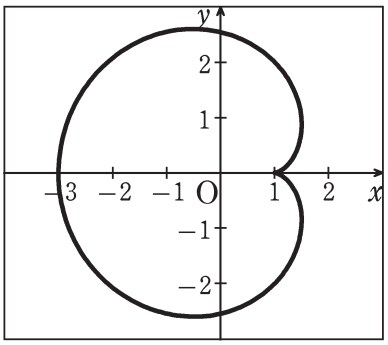
すなわち，点 A を極，半直線 Ax を始線とすると，点 Q は極方程式　$r=2(1-\cos\theta)$　を満たす。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

$=(1,\ 0)+(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

$=(1+2(1-\cos\theta)\cos\theta,\ 2(1-\cos\theta)\sin\theta))$

$=(2\cos\theta-\cos2\theta,\ 2\sin\theta-\sin2\theta)$



ゆえに　P(cosθ，sinθ)，

Q($2\cos\theta-\cos2\theta$，$2\sin\theta-\sin2\theta$)

P(z) に対して，z^2 を表す複素数は　$\cos2\theta+i\sin2\theta$　となるから，Q(u) は　$u=2z-z^2$　……答

@ 2 倍角の公式で z^2 にする場面も必要。

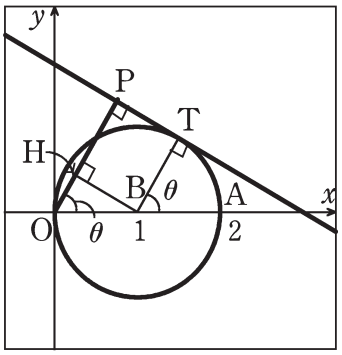
補足 これにより，点 Q の媒介変数表示が Q($2\cos\theta-\cos2\theta$，$2\sin\theta-\sin2\theta$) となることがわかった。極が原点ではないが，cardioid になる。それを検証するには，図全体を y 軸に関して対称移動 (θ を $\pi-\theta$ に変更)するとよい。確かに，$r=2(1+\cos\theta)$ となる。原題においては，単位円に半径 1 の円が点 A(1，0) で外接している状態から，外側の円が滑ることなく転がったときの初期状態で点 A にいた点の軌跡である。なお，類題が 2005 年岡山大学に出題され，長さの求値もついていた。

■岡山大学の過去問■

O を原点とする座標平面において，点 A の座標を $(2,\ 0)$ とする。線分 OA を直径とする円周上の点 T における接線に O から下ろした垂線を OP とする。T が円周上を動くとき，P が描く曲線の長さを求めよ。

▲解答▲B$(1,\ 0)$ とし，B から直線 OP に下ろした垂線を BH とする。

$\angle ABT=\theta$ とすると，$\angle AOP=\theta$ である。



また，$OH=\cos\theta$，$PH=1$ であるから，$P(x,\ y)$ とおくと

$$x=(1+\cos\theta)\cos\theta,\quad y=(1+\cos\theta)\sin\theta$$

これは，$\theta>\dfrac{\pi}{2}$ などのときにも成り立つ。

$$\frac{dx}{d\theta}=(-\sin\theta)\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta)$$

$$=-\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta=-\sin\theta-\sin2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=(-\sin\theta)\sin\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta$$

$$=-\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta=\cos\theta+\cos2\theta$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=1+1+2(\cos2\theta\cos\theta+\sin2\theta\sin\theta)=2+2\cos\theta=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

よって $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2}=2\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$

したがって，求める曲線の長さは

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$

$$=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=4\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=8 \quad \cdots\cdots\text{答}$$

@ お馴染み cardioid の長さ

@ 長さを求める際に，cos の加法定理の逆変形をする点が，初見で解くにはやや厳しい。むしろ，極座標の長さ公式を証明してから適用するほうが賢いし，汎用性に富む。具体的には

別解 極座標系で考えると，$r=1+\cos\theta$，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ であるから

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta,\quad \frac{dr}{d\theta}=-\sin\theta$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}\qquad\leftarrow\text{ここの部分が極座標系の長さ公式に}$$

$$=\sqrt{\sin^2\theta+1+2\cos\theta+\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{2(1+\cos\theta)}$$

$$=2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

よって，求める曲線の長さは

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$
$$=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$
$$=4\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=8 \quad \cdots\cdots$答$$

@ このほうが，計算の見通しが遥かによい。なお，極座標系の面積公式，長さ公式が掲載されている参考書が少ないのは誠に残念。

オマケ

2018年大阪大学理系第3問には hypocycloid が出題されていた。媒介変数表示が似ている。

■大阪大学問題■

2つの関数

$$f(t)=2\sin t+\cos 2t,\quad g(t)=2\cos t+\sin 2t$$

を用いて定義される座標平面上の曲線

$$C:\ x=f(t),\ y=g(t)\quad \left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。

(1) t が $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ。

(2) t_1，t_2 を $0\leqq t_1<t_2\leqq\frac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1)=f(t_2)$ を満たす実数とする。このとき，$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$ が成り立つことを示せ。

(3) C と直線 $x=1$ が囲む領域の面積 S を求めよ。

▲解答▲ (1) $f'(t)=2\cos t-2\sin 2t=2\cos t(1-2\sin t)$

右の増減表により，$t=\frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{3}{2}$ をとる。……$答$

t	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1

$g'(t)=-2\sin t+2\cos 2t=-2(2\sin^2 t+\sin t-1)$

$=-2(\sin t+1)(2\sin t-1)$

右の増減表により，$t=\frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

……$答$　@ 易!

t	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$		+	0	−	
$g(t)$	2	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

(2) 証明 $f(t_1)=f(t_2)$ のとき

$2\sin t_1+1-2\sin^2 t_1=2\sin t_2+1-2\sin^2 t_2$

$\sin t_1-\sin t_2=\sin^2 t_1-\sin^2 t_2$

$\sin t_1\neq\sin t_2$ であるから　$\sin t_1+\sin t_2=1$

$g(t)^2=\{2\cos t(1+\sin t)\}^2=4(1-\sin^2 t)(1+\sin t)^2=4(1-\sin t)(1+\sin t)^3$

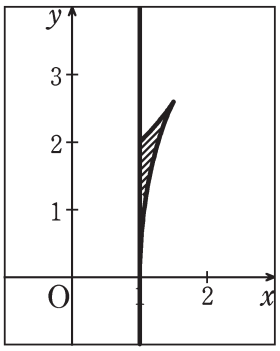
であるから

$\sin t_1=s$ とおくと，$\sin t_2=1-s$，$0\leqq t_1<\frac{\pi}{6}$ より　$0\leqq s<\frac{1}{2}$ …… ①

$$g(t_1)^2-g(t_2)^2=4(1-s)(1+s)^3-4s(2-s)^3$$
$$=4(1+2s-2s^3-s^4)-4(8s+12s^2-6s^3+s^4)$$
$$=4(1-6s+12s^2-8s^3)=4(1-2s)^3>0 \quad (\because \text{①より}) \quad \text{終}$$

@ これは計算が重い。大阪大学受験者には無理か。点のプロットで概形をかけば十分かと。

(3) (1), (2) により，曲線の概形は次の図。

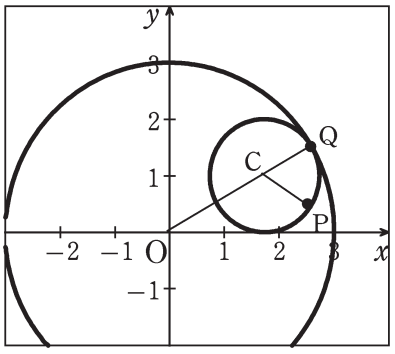


$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$ のときの y を $y=g_1(t)$，$\dfrac{\pi}{6} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のときの y を $y=g_2(t)$ とすると

$$S=\int_1^{\frac{3}{2}} g_1(t)dx-\int_1^{\frac{3}{2}} g_2(t)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} g(t)f'(t)dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} g(t)f'(t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)f'(t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos t+\sin 2t)(2\cos t-2\sin 2t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^2 t-2\cos t\sin 2t-2\sin^2 t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+2\cos 2t-4\cos^2 t\sin t+\cos 4t-1)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos 2t+\cos 4t+1-4\cos^2 t\sin t)dt$$
$$=\left[\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 4t+t+\frac{4}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

@ (2) の重たい計算のあとでは，体力の限界かと。試験会場では非常に厳しい。

研究 実際に，hypocycloid であることを検証してみよう。原点中心，半径 3 の円に点 A(3, 0) で内接する半径 1 の円を考える。内側の円が滑ることなく転がったときの初期状態で点 A にいた点の軌跡を求める。軌跡上の点を P とし，内側の円の中心を C，$\angle xOC=\theta$ とおくと，接点 Q に対して $\angle PCQ=3\theta$ であるから



$\overrightarrow{OC}=(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$

$\overrightarrow{CP}=(\cos(\theta-3\theta),\ \sin(\theta-3\theta))$

$=(\cos 2\theta,\ -\sin 2\theta)$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}$

$=(2\cos\theta+\cos 2\theta,\ 2\sin\theta-\sin 2\theta)$

よって　$P(2\cos\theta+\cos 2\theta,\ 2\sin\theta-\sin 2\theta)$

これが，標準的な hypocycloid の媒介変数表示であるが，

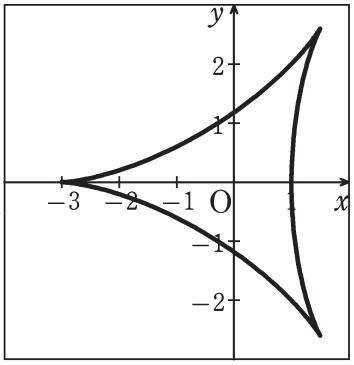
大阪大学の問題は，優秀な受験生にばれないように(?) y 軸対称移動し，逆回転で始点も変更している。具体的には，

y 軸に関する対称点 $(-2\cos\theta-\cos 2\theta,\ 2\sin\theta-\sin 2\theta)$

をとり，$\theta-\dfrac{\pi}{2}=t$ とおくと，座標は

$$\left(-2\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-\cos 2\left(t+\frac{\pi}{2}\right),\ 2\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-\sin 2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

すなわち $(2\sin t+\cos 2t,\ 2\cos t+\sin 2t)$ となり，大阪大学の問題と座標の媒介変数表示が完全に一致することがわかる。



@ これなら，かなり優秀な受験生でも，hypocycloid とは気づきにくい。よくぞ工夫したが，普通の設定で $0\leqq t\leqq\pi$ の範囲の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めさせたほうが入学者選抜としての弁別度があったものを。残念であった。昨年度は物理で，今年度は数学で大阪大学関係者は猛省すべし。昨年度は神戸大学･理系数学の弁別度がなかった。入試問題に弁別度は非常に重要なことは言うまでもあらず。

4 東大理科第 5 問 (2) 単独のスーパー別解

■問題の単独化改題■　かように改題すると，難問かと

> 複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする。点 $P(z)$ は C 上にあり，点 $A(1)$ とは異なるとする。点 P における円 C の接線に関して，点 A と対称な点を $Q(u)$ とし，$w=\dfrac{1}{1-u}$ とおく。C のうち実部が $\dfrac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分 C' 上を点 $P(z)$ が動くときの点 $R(w)$ の軌跡を求めよ。

▲極座標の考えによる簡単な解答▲

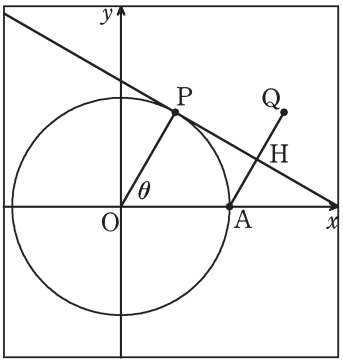
$\angle xAQ=\angle AOP=\theta$ $(-\pi<\theta\leqq\pi)$ とおくと，点 A から直線 OP に垂線を引くことにより

$$AH=1-\cos\theta$$

すなわち，点 A を極，半直線 Ax を始線とすると，点 Q は極方程式　$r=2(1-\cos\theta)$　を満たす。

これは，$u-1$ の極方程式に相当するので，$1-u$ の極方程式は

$r=2\{1-\cos(\theta+\pi)\}$　　すなわち　　$r=2(1+\cos\theta)$



$$w=\frac{1}{1-u}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\cos\theta}\qquad\text{すなわち}\qquad w+w\cos\theta=\frac{1}{2}$$

点 R の x 座標は，$w\cos\theta\ (=x)$ であるから

$$w-0=\frac{1}{2}-x$$

よって，w は複素数平面上で原点と直線 $Re\,z=\dfrac{1}{2}$ から等距離にある。すなわち，これらをそれぞれ焦点，準線とする放物線上に存在する。条件の θ の値を $\theta+\pi$ に補正して

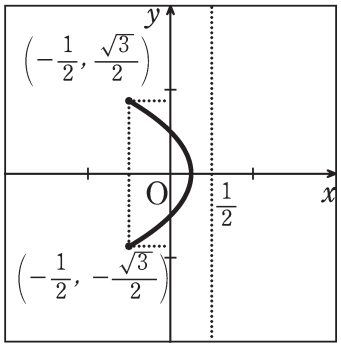
$$-\frac{1}{2}\leqq\cos(\theta+\pi)\leqq 1\qquad\text{よって}\qquad\frac{1}{4}\leqq w\leqq 1$$

したがって，求める軌跡は次図の放物線の一部。……答

@ 角の変換と範囲の補正は必要であるが，非常に単純。暗算でOK♪
京大なら，この形で出題したかも。なお，角の補正を回避するには $1-u$ の極方程式を

$$r=-2(1-\cos\theta)$$

にするとよい。ただし，$r<0$ の形も許すものとする。



5 生徒への今後の指導について

新課程入試の目玉である複素数平面の問題が出題され続けることは間違いない。しばらくの間は，典型問題をまんべんなく演習し，準備しておけば一応大丈夫であろう。ただし，この分野が理系合否の鍵を握ることも間違いないので，微積分の計算の次に精度の高い完成度にもっていく必要がある。基礎になる三角関数の計算技術の完成も要求される。また，近い将来にはマンネリ化の影響で，図形問題を中心に高度な問題が増加することも予想される。例えば，曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ を原点の周りに $\frac{\pi}{4}$ 回転した曲線の方程式を求めるなど，この分野で学習指導要領に触れられていないような出題も十分ありうる。

超難関大学などでは特殊な訓練が要求されることも今後は大いに予想されるので，指導する側が日々研究することが第一に重要であるし，指導者の個人的な力量の差が出る分野であろう。それゆえ，教師冥利に尽きるしやり甲斐もあるというもの。皆さん，お互い謙虚に切磋琢磨いたしましょう。なお，本論文のスーパー解法は，すべて筆者の休日の遠距離ロードにおける思考の賜物。この永年の涙ぐましい日夜の鍛錬により，暗算能力は格段に進歩することができた。天賦の才に恵まれぬ筆者は，鈍牛の如く努力するのみ。最後になりましたが，読者諸賢のご精読と発表の機会をくださった編集委員の先生方に感謝いたします。

E−mail:yamakawa2005jp@yahoo.co.jp

参考文献

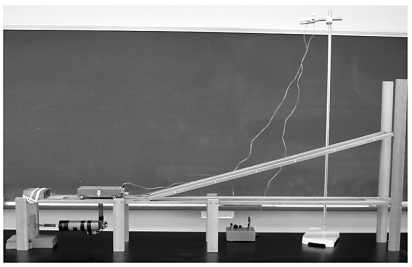
[1] 山川 宏史 「東大複素数平面問題の背景 ～多面的に探る～」
(『フォーカス・ゴールド通信第15号』啓林館，2018年6月)啓林館

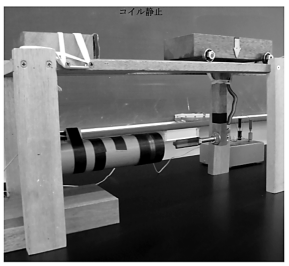
電磁誘導

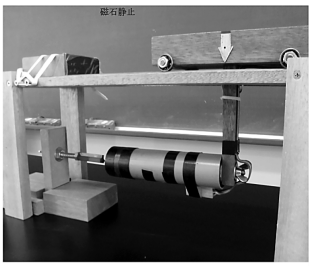
田中初四郎

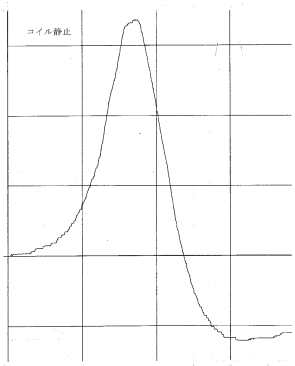
概 要

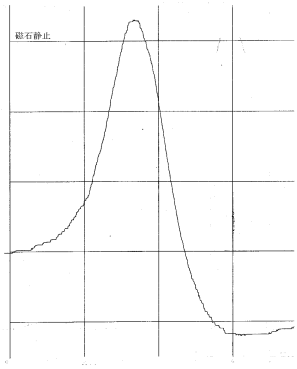
A:静止したコイルに磁石が近づく，B:静止した磁石にコイルが近づく
どちらも同じ電流がコイルに流れ，同じ起電力がコイルに生じる。起電力はコイルと磁石の相対速度のみで決まり，観測者に対してコイル・磁石のいずれが静止しているか，ともに動いているかに関係しない。しかし，起電力の原因はAでは磁場が時間的に変化することで生じる誘導電場<誘導法則>，Bでは磁場中を運動する電子に働くローレンツ力である。以前この事を実験で確かめる実験装置を作成し，相対速度が同じ場合，縦軸に起電力・横軸に時間のグラフは実験精度で一致したことを発表した。今回は異なる2種の法則を一つの形式にまとめたファラデーの誘導法則のポイントを確認し，起電力の原因について考察する。











1 電磁誘導とは

理化学辞典によると

1 つの閉じた回路 (2 次回路) の近くで，電流の流れている他の回路 (1 次回路) または磁石を動かすとき 2 次回路に電流が流れる．また，もともと電流が流れていればその強さが変わる．1 次回路を固定したままその電流を変えたり，あるいは 2 次回路の方を動かしたりしても同様のことがおこる．これは 1831 年ファラデーが発見した現象で，電磁誘導とよばれる．以上の種々の場合に共通なことは，2 次回路を貫く磁束の量が変化する点である．磁束が変化している間，2 次回路に起電力が生じたとみることができる．この起電力は常に磁束の変化を少なくするような電流を流す方向におこり，その大きさは回路

を貫く磁束の減少速度に比例する．磁束密度を $\vec{B}$，回路 C を縁とする任意の面 S 上の微小面積 dS に垂直な $\vec{B}$ の成分を B_n として，磁束は

$$\Phi = \int_S B_n dS$$

である．ここで電場を $\vec{E}$ とすれば，回路に生じる起電力は

$$V = \oint E_s ds$$

と書ける．ds は回路の微小要素の長さ，E_s は $\vec{E}$ の ds 方向の成分である．回路に向きを定めて，その向きの ds を正とし，かつその向きにまわした右ねじの進む向きに面 S を貫く B_n を正とする．そうすると上の法則は

$$\oint E_s ds = -\frac{d}{dt}\int_S B_n dS \tag{1.1}$$

という形に表わされ，これをファラデーの誘導法則 (Faraday's law of induction) という．この法則は閉回路について成り立つだけでなく，空間内の任意の閉曲線とそれの張る任意の曲面について成り立つ．このことからマクスウェル方程式のうち

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.2}$$

が導かれる．なお，電磁誘導の向きに関してレンツの法則がある．

ファラデーがどのように考えて電磁誘導を発見したかの詳細は文献 2 に譲ることにする。いずれにせよファラデーが電磁誘導を式 (1.1) にまとめられたのは「磁束」という物理量を使うことを思いついたからである。

2　磁束の変化

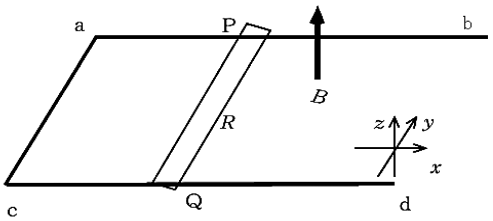


fig 1

普通のコイルと磁石を扱うのは大変なので fig1 のように平面 acdb に垂直に一様な磁束密度 $\vec{B}$ がかかってい設定で考える。この設定では $B_n = B$ で，回路を貫く磁束 Φ は

$$\Phi = \int_S B_n dS = B \cdot S$$

となる。この磁束 Φ の時間的変化は

$$\frac{d}{dt}\Phi = S \cdot \frac{dB}{dt} \quad （S：一定） \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt}\Phi = B \cdot \frac{dS}{dt} \quad （B：一定） \tag{2.2}$$

の 2 通りがあり得る。

2.1　２次回路の面積 S が一定で磁束密度 $\vec{B}$ が時間的に変化する

$\bar{ac}$=L のとき，棒 PQ を $a\bar{P}$=L で固定し，磁束密度 $\vec{B}$ を時間的に変化させる。磁束の時間的変化は式 (2.1) より

$$\frac{d}{dt}\Phi = L^2 \cdot \frac{dB}{dt} \tag{2.3}$$

となり，起電力は

$$\oint E_s ds = EL \cdot 4 \tag{2.4}$$

である。式 (1.1) に式 (2.3) と式 (2.4) を代入すると磁束密度 B が時間的に変化すると回路に沿って

$$E = -\frac{L^2}{4}\frac{dB}{dt} \tag{2.5}$$

という誘導電場 $\vec{E}$ が発生することで，回路に起電力が生じる。このことはマクスウェル方程式 (1.2) を fig1 に適応した結果でもある。

2.2　２次回路にかかる磁束密度 $\vec{B}$ が一定で面積 S が時間的に変化する

棒 PQ が辺 ab・cd に常に垂直で右向きに等速 v に動く場合，磁束の時間的変化は式 (2.2) より

$$\frac{d}{dt}\Phi = B \cdot \frac{dS}{dt} = B \cdot \frac{Lvdt}{dt} = BLv \tag{2.6}$$

となり，起電力は $V = BLv$ で回路に流れる電流は $I = \frac{V}{R} = \frac{BLv}{R}$ となる。

起電力の原因は

$$\oint E_s ds = E'L \tag{2.7}$$

であるから，式 (1.1) に式 (2.6) と式 (2.7) を代入すると棒 PQ に

$$E' = -\frac{BLv}{L} = -Bv \tag{2.8}$$

なる電場 $\vec{E'}$ が存在し，fig2 のようにこの電場によるクーロン力 f_C が電子を Q から P にくみ上げ，起電力はこのクーロン力 f_C によってもたらされる。

これは磁場 $\vec{B} = (0, 0, B)$ だけが存在する慣性系Kに対して速度 $\vec{v} = (v, 0, 0)$ の慣性系K′では磁場以外に電場 $\vec{E'} = (0, -vB, 0)$ が存在することになる。電場と磁場は別物と思っていたのが誤りで電場と磁場をひとまとめにした電磁場が実体であることを示している。この関連は古典物理では記述できなくて特殊相対性理論によってはじめて理解できることが知られている。慣性系KとK′がローレンツ変換

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \end{aligned}$$

で関係づけられるとき，電磁場は

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - vB_z) & B'_y &= \gamma(B_y + \tfrac{v}{c^2}E_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + vB_y) & B'_z &= \gamma(B_z - \tfrac{v}{c^2}E_y) \end{aligned}$$

のように変換するので，$\vec{B}=(0,0,B)$，$\vec{E}=(0,0,0)$ のとき上式群は

$$\begin{aligned} E'_x &= \quad 0 \qquad B'_x = 0 \\ E'_y &= -\gamma vB \qquad B'_y = 0 \\ E'_z &= 0 \qquad B'_z = \gamma B \end{aligned}$$

となる。棒の移動速度 v は光速度 c に比べて十分小さいので，$\gamma = 1$ とし，慣性系K′ には磁場 $\vec{B}'=(0,0,B)$ だけではなく電場 $\vec{E}'=(0,-vB,0)$ が存在することになり，式 (2.8) が導出される。

3　ローレンツ力

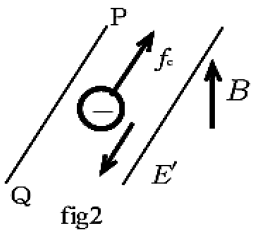


fig2

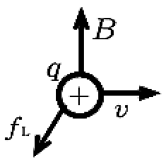


fig3

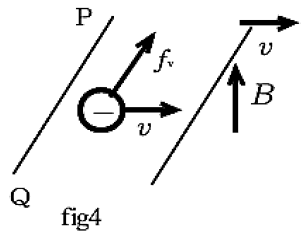


fig4

磁場 $\vec{B}=(0,0,B)$ の慣性系Kに対して $\vec{v}=(v,0,0)$ で動く電荷 q の粒子には fig3 のようにローレンツ力 $\vec{f_L}$

$$\begin{aligned} \vec{f_L} &= q\vec{v}\times\vec{B} \\ &= (0,-qvB,0) \end{aligned}$$

が働く。fig1 で棒 PQ が＋ x 方向に v で動くことは，棒 PQ 内の自由電子には fig4 のようにローレンツ力 $\vec{f_v}$

$$\begin{aligned} \vec{f_v} &= (-e)\vec{v}\times\vec{B} \\ &= (0,evB,0) \end{aligned}$$

が働くことになり，＋ y 方向つまり Q から P に電子がくみ上げられる。これにより回路に起電力が生じる。

4　仕事と起電力

4.1　慣性系Kから見て

fig4 のように棒 PQ が＋ x 方向に v で動くとき，棒 PQ 内の電子も＋ x 方向に v で動く。電子には＋ y 方向にローレンツ力 $\vec{f_v}$ が働き，QからPに動くことになる。回路に電流を流す起電力の原因はローレンツ力 $\vec{f_v}$ ということになる。この現象を仕事の観点で考えると

$$\begin{aligned} \text{起電力} \quad &\Rightarrow \quad W_1 = eV \\ \text{ローレンツ力} \quad &\Rightarrow \quad W_2 = evBL \end{aligned}$$

となり，$W_1 = W_2$ だから，起電力 V が

$$V = \frac{W_1}{e} = \frac{W_2}{e} = \frac{evBL}{e} = vBL \tag{4.1}$$

と求められ，式 (2.6) と一致した結果が得られる。

4.2 棒 PQ の静止系

棒 PQ の静止系は慣性系 K に対して＋ x 方向に v で動く慣性系 K′ である。慣性系 K で磁場 $\vec{B}=(0,0,B)$，電場 $\vec{E}=(0,0,0)$ は慣性系 K′ では $\vec{B'}=(0,0,B)$，$\vec{E'}=(0,-vB,0)$ となる。ただし，$c \gg v$ とする。

fig2 のように慣性系 K′ では静止した電子にクーロン力 $\vec{f_C}=(-e)\cdot\vec{E'}=(0,evB,0)$ が働き，このクーロン力 $\vec{f_C}$ により電子は Q から P にくみ上げられ，回路に電流が流れる。クーロン力 $\vec{f_C}$ が起電力の原因と解釈できる。この現象を仕事の観点で考えると

$$\begin{aligned} \text{起電力} \quad &\Rightarrow \quad W_1 = eV \\ \text{クーロン力} \quad &\Rightarrow \quad W_3 = evBL \end{aligned}$$

となり，$W_1=W_3$ だから，起電力 V が

$$V=\frac{W_1}{e}=\frac{W_3}{e}=\frac{evBL}{e}=vBL \tag{4.2}$$

と求められ，式 (2.6) と式 (4.1) とも一致する。

4.3 ローレンツ力は仕事をするのか

4.1 でローレンツ力が電子にする仕事から起電力を求めると話が自然になる。しかし，ローレンツ力は速度に常に垂直なので,「ローレンツ力は仕事をしない」。これを避けるために次のように説明する。

棒 PQ には定常電流が流れるので fig5 のように棒 PQ 内の電子に働く力がつり合う必要がある。Q に電子がくみ上げられることで QP 間に電荷の偏りが生じ，Q から P の向きに静電場 E_s が発生する。この静電場 E_s により電子には− y 方向にクーロン力 f_s が働く。力のつりあいの式は

$$\begin{aligned} f_v + f_s &= 0 \\ evB + (-eE_s) &= 0 \end{aligned}$$

となり，$E_s=vB$ が得られる。Q に対して P が $E_sL=vBL$ だけ高電位になり，fig1 の PQcaP に電流が流れる。が，静電場 E_s によるクーロン力 f_s は P から Q の向きで，電子を Q から P にくみ上げる原因とは言えない。つまり，静電場 E_s は起電力の原因ではない。

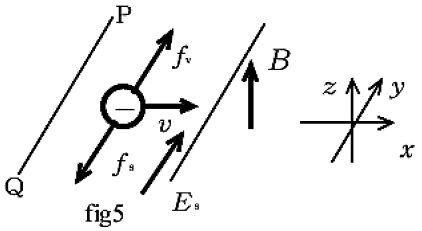


fig5

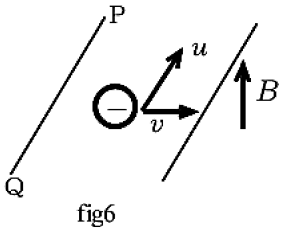


fig6

fig1 で回路に定常電流が流れた状態では，fig6 のように慣性系 K に対して，電子は＋ x 方向に等速 v，＋ y 方向に等速 u で動くことになる。つまり，電子の速度 $\vec{V}$ は $\vec{V}=(v,u,0)$ である。電子に働くローレンツ力 $\vec{f_L}$ は

$$\begin{aligned} \vec{f_L} &= (-e)\vec{v}\times\vec{B} \\ &= (-e)(uB,-vB,0) \\ &= (-euB,evB,0) \end{aligned}$$

となる。電子が Q から P に達するのに要する時間を t_1 とすると $ut_1 = L$ となり，その間に棒 PQ は

$$vt_1 = v\frac{L}{u}$$

だけ＋ x 方向に進む。ローレンツ力 $\vec{f_L}$ の x 成分 f_{Lx} のする仕事 w_x は

$$w_x = f_{Lx}(vt_1) = (-euB) \cdot v\frac{L}{u} = -evBL \tag{4.3}$$

となり，y 成分 f_{Ly} のする仕事 w_y は

$$w_y = f_{Ly}L = evBL \tag{4.4}$$

となる。ローレンツ力 $\vec{f_L}$ のする仕事 w は式 (4.3) と式 (4.4) より

$$w = w_x + w_y = (-evBL) + evBL = 0$$

つまり，

$$\begin{aligned} \vec{f_L} \cdot \vec{V} &= (-euB, evB, 0) \cdot (v, u, 0) \\ &= (-evuB) + evuB \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり，ロレンツ力 $\vec{f_L}$ は仕事をしない。

y 成分 f_{Ly} が仕事 $w_y = evBL$ をすることが起電力のする仕事に一致すると言うことは避けなければならい。このことはなめらかな斜面上で物体に働く垂直抗力のする仕事は 0 であるが，垂直抗力の水平成分のする仕事 W_1 と鉛直分力のする仕事 W_2 はどちらも 0 でないが,「垂直抗力の水平成分のする仕事 W_1」を取り出して議論しないことに留意すべきである。（ちなみに $W_1 + W_2 = 0$ である）

4.4 エネルギーの移り変わり

ローレンツ力がする仕事が 0 ということは，起電力がする仕事は何によってもたらされるのであろうか。fig1 で棒 PQ の＋ x 方向の運動を考える。棒 PQ が等速 v で動くと言うことは，棒 PQ の質量を m とし，運動方程式は

$$m \cdot 0 = F + (-F_A)$$

となり，電流が磁場から受けるアンペールの力 $F_A = IBL$ とつり合う外力 F を加え続けることが必要である。電子が Q から P に達する時間 t_1 の間に外力 F のする仕事 W_F は

$$W_F = F \cdot vt_1 = IBL \cdot v\frac{L}{u}$$

となり，棒 PQ 中の電子の粒子密度を n，断面積を S とすると，電流は $I = enuS$ なので,

$$\begin{aligned} W_F &= enuS \cdot BL \cdot v\frac{L}{u} \\ &= enSvBL^2 \end{aligned}$$

である。棒 PQ の中にある電子数は $N = nSL$ なので,

$$W_F = Ne \cdot vBL$$

となる。ローレンツ力 $\vec{f_L}$ の x 成分の棒 PQ 内のすべての電子に対する仕事 W_x は

$$W_x = N \cdot w_x = N \cdot (-evBL)$$

であり，$W_F + W_x = 0$ となる。また，$N \cdot w_x + N \cdot w_y = 0$ であるから，

$$\begin{aligned} |W_F| &= |W_x| = |W_y| \\ W &= W_F + W_x + W_y = Ne \cdot vBL \end{aligned}$$

となり，起電力のする仕事は外力のする仕事がその原因である。電磁誘導は，力学的な仕事を電気エネルギーに変換する働きをする現象と言える。

ローレンツ力が仕事をすると考えるのが自然な電磁誘導の現象では次のように考えればよいことがわかった。

1）起電力の原因と見なせるローレンツ力 $\vec{f_v}$ のする仕事 W_v を求める。

2）ローレンツ力 $\vec{f_v}$ を導出する速度 $\vec{v}$ に垂直な速度 $\vec{u}$ が電流を担い，電子にはローレンツ力 $\vec{f_u}$ が働き，仕事 W_u を行う。この時，$W_u + W_v = 0$ である。

3）運動を続けるためには $\vec{F} + N \cdot \vec{f_u} = 0$ を満たす外力 $\vec{F}$ を加え続ける必要がある。 外力 $\vec{F}$ のする仕事 W_F は $W_F = -W_u$ となる。

4）この運動を支えるのは外力 $\vec{F}$ であり，

$$W_F = -W_u = -(-W_v) = W_v$$

となり，ローレンツ力 $\vec{f_v}$ がする仕事 W_v を求めれば起電力は

$$V = \frac{W_F}{Ne} = \frac{W_v}{Ne} = vBL \tag{4.5}$$

と求めることができる。

5　誘導法則

4.1 と 4.2 は慣性系間のローレンツ変換で処理できる。ところが，鉛直上向きに一様な磁場 $\vec{B} = (0, 0, B)$ 中を水平面内で一定の角速度 ω で回転する棒・円板による現象はそうはいかない。

5.1　棒の回転運動

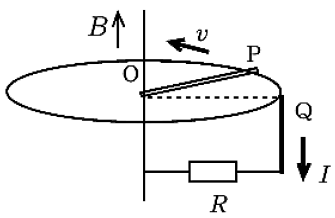


fig7

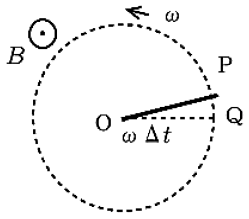


fig8

fig7 のような半径 A の円形のレールに一端Pが常に接し，他端が中心Oの周りになめらかに水平面内で一定の角速度 ω で回転する棒がある。鉛直上向きに一様な磁場 $\vec{B} = (0, 0, B)$ をかける。$+z$ 方向から見ると fig8 のようになる。

fig8 から基線ＯＱに対して dt 間に中心角 ωdt だけ回転する。棒ＯＰ描く面積 dS は

$$dS = \frac{1}{2\pi} \cdot \omega dt \cdot \pi A^2 = \frac{1}{2}\omega A^2 dt$$

となる。式 (1.1) と式 (2.2) より棒ＯＰ間に生じる起電力の大きさ V は

$$V = B\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\omega BA^2 \tag{5.1}$$

と求めることができ，回路には $I = \frac{V}{R} = \frac{\omega BA^2}{2R}$ の一定の電流がＯからＰに向かって流れる。

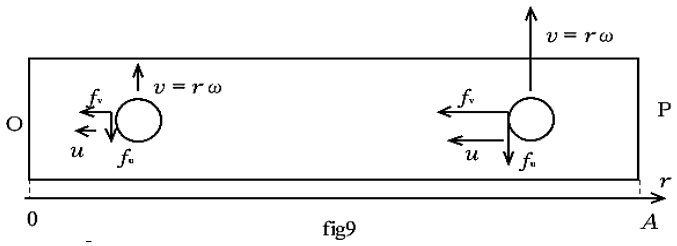


fig9

この現象を電子の速度と速度ごとのローレンツ力の分力について図示したのが fig9 である。Ｏから r 離れた点で電子は接線方向に $v = r\omega$ ，法線方向にＰからＯに u の速度を持ちそれぞれに対するローレンツ力の分力

$$\begin{aligned} f_v &= evB = er\omega B \\ f_u &= euB \end{aligned}$$

が働いている。ここで注目すべき事は，fig9 からわかるように f_u は r に関係し，u も r に関係して変わる。回路に流れる電流 I が一定と言うことは電子密度 n も r に関係して変わり，$nu = \frac{I}{eS}$ が一定となる。（S は棒 PQ の断面積）

円形レールの接点Ｐから中心Ｏに電子がローレンツ力の分力 f_v によりくみ上げられ，ローレンツ力の分力 f_v のする仕事は

$$w_v = \int_A^0 er\omega B \cdot (-dr) = \int_0^A er\omega B \cdot dr = \frac{1}{2}e\omega BA^2 \tag{5.2}$$

となる。棒ＯＰを一定の角速度 ω で回転させるには r における外力 dF_r

$$dF_r = (-f_u) \cdot nSdr = euB \cdot nSdr = enuS \cdot Bdr = IBdr$$

を加え続ける必要があり，全体として

$$F = \int_0^A dF_r = \int_0^A IBdr = IBA \tag{5.3}$$

となる。電子がＯからＰに達するのに要する時間を t_2 とし，その間に外力がする仕事 W_F は

$$W_F = \int_0^A dF_r \cdot r\omega t_2 = \int_0^A IBr\omega t_2 \cdot dr = \frac{1}{2}IB\omega t_2 A^2 = IBA \cdot \frac{1}{2}A\omega t_2 \tag{5.4}$$

で，その仕事率 P_F は

$$P_F = \frac{W_F}{t_2} = \frac{1}{2}IB\omega A^2 = IBA \cdot \frac{1}{2}A\omega \tag{5.5}$$

となる。棒 OP の中央 ($\frac{1}{2}A$) における接線方向の速度が $\frac{1}{2}A\omega$ なので，式（5.4）は外力 F のする仕事が半径 r の接線方向の速度 $v = r\omega$ が r で異なるなか棒の中央での速度を掛けたものになっている。抵抗にかかる電圧 V − 式（5.1）と流れる電流 I の消費電力 P は

$$P = IV = I \cdot \frac{1}{2}\omega BA^2 = \frac{1}{2}IB\omega A^2 \tag{5.6}$$

で，$P_F = P$ となっている。

起電力の原因はローレンツ力 f_v がした仕事 w_v と考えられる現象である。真の原因は一定の角速度 ω で棒 OP を回転させる外力 F がする仕事である。$It_2 = Ne$ であることに留意し，4.4 のまとめにしたがい

$$\begin{aligned} W &= W_F + W_v + W_u \\ W_v + W_u &= 0 \\ |W_F| &= |W_v| = |W_u| = N|w_v| = Ne \cdot \frac{1}{2}\omega BA^2 \\ W &= Ne \cdot \frac{1}{2}\omega BA^2 \end{aligned}$$

となり，起電力 V は

$$V = \frac{W_F}{Ne} = \frac{W_v}{Ne} = \frac{1}{2}\omega BA^2 \tag{5.7}$$

と求めればよい。当然，式（5.1）と一致した結果が得られる。

5.2 円板の回転運動

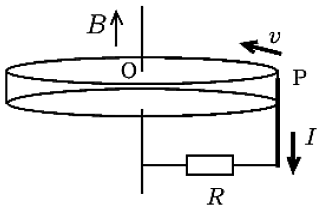


fig10

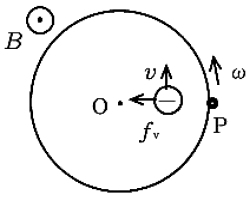


fig11

fig10 のような一様な厚さ τ で半径 A の金属円板を鉛直上向きに一様な磁場 $\vec{B} = (0, 0, B)$ 中を水平面内で一定の角速度 ω で回転させる。$+z$ 方向から見ると fig11 のようになる。

fig11 からこの現象では磁束の時間的変化を考える事はできない。が，円板の周囲から中心 O に電子がローレンツ力の分力 f_v によりくみ上げられ，O から円板の周囲に電流が流れる。この現象を電子の速度と速度ごとのローレンツ力の分力について図示したのが fig12 である。O から r 離れた点で電子は接線方向に $v = r\omega$ ，法線方向に P から O に u の速度を持ちそれぞれに対するローレンツ力の分力

$$\begin{aligned} f_v &= evB = er\omega B \\ f_u &= euB \end{aligned}$$

が働いている。中心 O と接点 P を結ぶ線上で O から r にある電子の速度は $v = r\omega$ で磁場から中心 O に向かうローレンツ力の分力 $f_v = evB = er\omega B$ を受け，電子は円板の周囲から中心 O にくみ上げみ上げられる。ローレンツ力の分力 f_v のする仕事は

$$w_v = \int_A^0 er\omega B \cdot (-dr) = \int_0^A er\omega B \cdot dr = \frac{1}{2}e\omega BA^2 \tag{5.8}$$

となる。

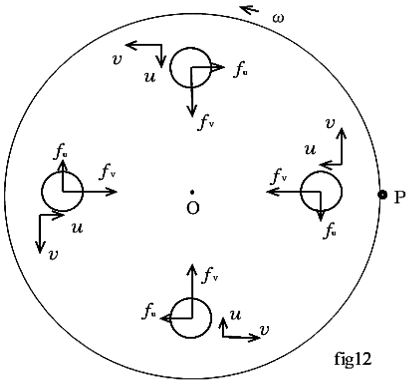


fig12

ここで，注目すべき事は電子は金属円板全体を動き，f_u は r に関係し，u も r に関係して変わる。回路に流れる電流 I が一定と言うことは電子密度 n も r に関係して変わり，$nu \cdot \tau 2\pi r = \frac{I}{e}$ が一定となる。金属円板を一定の角速度 ω で回転させるには半径 r における外力 dF_r は

$$dF_r = (-f_u) \cdot ndv = euB \cdot n(\tau 2\pi r dr)$$

となる。回路を流れる電流 I は,

$$I = enuS = enu \cdot \tau 2\pi r$$

なので,

$$\frac{dF_r}{I} = \frac{euB \cdot n\tau 2\pi r dr}{enu \cdot \tau 2\pi r} = Bdr$$

である。電子がOからPに達するのに要する時間を t_2 とし，その間に外力がする仕事 W_F は

$$W_F = \int_0^A dF_r \cdot r\omega t_2 = \int_0^A IBdr \cdot r\omega t_2 = \frac{1}{2} IB\omega t_2 A^2 \tag{5.9}$$

で，その仕事率 P_F は

$$P_F = \frac{W_F}{t_2} = \frac{1}{2} IB\omega A^2 \tag{5.10}$$

となる。抵抗にかかる電圧 V と流れる電流 I の消費電力 P は $P = P_F$ である。

起電力の原因はローレンツ力 f_v がした仕事 w_v と考えられる現象である。真の原因は一定の角速度 ω で棒 OP を回転させる外力 F がする仕事であり，$It_2 = Ne$ であることに留意し，4.4 のまとめにしたがい

$$\begin{aligned} W &= W_F + W_v + W_u \\ W_v + W_u &= 0 \\ |W_F| &= |W_v| = |W_u| = N|w_v| = Ne \cdot \frac{1}{2}\omega BA^2 \\ W &= Ne \cdot \frac{1}{2}\omega BA^2 \end{aligned}$$

となり，起電力 V は

$$V = \frac{W_F}{Ne} = \frac{W_v}{Ne} = \frac{1}{2}\omega BA^2 \tag{5.11}$$

と求めればよい。式（5.1）と式（5.11）は同じ値で，磁束密度 B と角速度 ω が同じなら長さ A の棒と半径 A の円板で同じ起電力が生じることがわかった。

6　まとめ

5.1，5.2 で棒・円板が静止した観測者K″で電磁場がどうなるかはK″系が加速度系であるために手に負えない。文献３によると慣性系では電磁場 $\vec{E}, \vec{B}$ がマクスウェル方程式

$$\text{I}: \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},\ \text{II}: \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\ \text{III}: \nabla \cdot \vec{B} = 0,\ \text{IV}: \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \tag{6.1}$$

により $\vec{E}$ と $\vec{B}$ の振る舞いが決まる。慣性系Kに対する速度 $\vec{v}$ の電子にはローレンツ力

$$\vec{f} = (-e)\vec{E} + (-e)\vec{v} \times \vec{B}$$

が働き，電子は運動方程式

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}$$

にしたがい運動する。この電子の運動を考慮し，式（6.1）で $\vec{E}$ と $\vec{B}$ の振る舞いが決まるというのが古典電磁気の考えである。

ファラデーは「磁束」という物理量を考える事で 5.2 の円板以外の磁場が関与して電流が流れる現象を説明できる誘導法則を見出した。ローレンツ力が電子をくみ上げることで電流が流れることが起電力の原因と考えられる現象では外力がする仕事が起電力のする仕事になっている。外力がする仕事 W_F と電子をくみ上げるローレンツ力のする仕事 W_v は $W_F = W_v$ である。起電力 V は電子をくみ上げるローレンツ力のする仕事 W_v を計算し，関与する電子の数を N としたとき

$$V = \frac{W_v}{Ne} \tag{6.2}$$

で求めればよい。

参考文献

[1] 『理化学辞典　第５版』（岩波書店，1998 年）

[2] 江沢　洋著,『現代物理学』（日本放送出版協会，1988 年）

[3] 砂川 重信著,『理論電磁気学　第２版』（紀伊國屋書店，1973 年）

岡山朝日研究紀要　バックナンバーリスト

第30号　2009. 3

『岡山朝日研究紀要』第30号の発刊にあたって　板谷正夫
固体における場の量子論の適用例
— フォノンと格子比熱について —　平松美喜雄
「理科総合Ａ」の項目「物質の構成」の
内容と観察・実験について　高祖幸男
岡山朝日高等学校におけるピアサポートの実践
— あたたかい学校風土づくりのために —　池本しおり
旧制中学校の草創期の「部」について
— 岡山中学の尚志会を事例として —　後神俊文
中間地域における戦国期荘園の展開とその意味
— 東寺領備中国新見荘代官新見国経期を事例に —　辰田芳雄

第31号　2010. 3

「伝統の継承」への取り組み　平井信雄
理科系部活動の指導について
— 朝日高校化学部の活動報告から —　関和久
岡山朝日高等学校におけるピア・サポート活動
～自重互敬の学校風土醸成と
生徒の社会的成熟への支援～　大西由美
岡山中学における修学旅行の成立　後神俊文
中間地域における戦国期荘園制の展開（続）
— 東寺領備中国新見荘代官新見貞経期と三村家親・元親期について —
辰田芳雄

第32号　2011. 3

「武者修行」を合い言葉に　平井信雄
「授業力の向上」への取り組み　学力向上委員会
「岡山朝日高等学校におけるピア・サポート活動Ⅱ
～継続していくための仕掛け～」　大西由美
定比例の法則に従わない化学反応を活用した授業の実践　南洋明
ヒメアカタテハ成虫の背側前翅の色彩決定の感受期
および調節因子についての検討　高橋元
木下尚江の女子教育論 — 新聞記事と小説による —　後神俊文
応仁の乱後の東寺領備中国新見荘の再興
— 細川京兆家の荘園請負構想 —　辰田芳雄

東京大学　二次試験　国語『第四問』に関する考察　平田丞二

第33号　2012. 3

「欲窮千里目　更上一層楼」　平井信雄
オリジナルな実力考査問題作成のプロセスとポイント　学力向上委員会
朝日高校のグローバル人材育成について　土家槇夫
高校期における運動部活動と学力に関する一考察
　― 体力が学力をはぐくむか ―　西原智子
岡山朝日高等学校におけるピア・サポート活動Ⅲ
　― ピア・サポーターによるＬＨＲの実践例 ―　大西由美
Alliance between India and The USSR
― To What extent India and the Soviet Union were committed allies ?―
　明石幸子
岡山朝日高等学校自校作成問題・数学を探る　山川宏史
〝煩悶の時代〟と小説『火宅』
　― 小説家木下尚江の終焉 ―　後神俊文
足利義満政権下の備中国新見荘　辰田芳雄
続・東大　国語『第四問』考
　― 平成二十三年東大国語『第四問』と名大国語『第一問』の比較を通して ―
　平田丞二

第34号　2013. 3

Ａ・Ｇ・Ｎ・Ｅ　杉本尚平
東南アジア低地熱帯雨林樹木 *Shorea parvifolia*（フタバガキ科）の
　集団構造と集団サイズの変遷　岩永廣子
岡山朝日高等学校におけるピア・サポート活動Ⅳ
　― 不登校出現率の減少との関連に関する一考察 ―　大西由美
木下尚江研究余呟
　― 普選運動開始期の婦人参政権論 ―　後神俊文
史料紹介　林原美術館所蔵「着到懐紙」　辰田芳雄
新見荘の半済　辰田芳雄

第35号　2014. 3

「鉄」の魅力　杉本尚平
ＧＩＳソフト「ＭＡＮＤＡＲＡ」を活用した授業
　― 日本の人口動態を考える授業実践より ―　竹内直志
凝固点降下の測定結果から推測される
p-ジクロロベンゼン中の各種有機化合物の挙動　貴志　貫

「クロムウェルの木下」由来考　後神俊文
備中国新見荘の百姓等申状・三職等注進状の収集と分析　辰田芳雄
評論文指導の工夫　―《論理的読解10のキーワード群》を用いた指導 ―　平田丞二
「と雖も」に承接する用言は終止形　辰田芳雄

第36号　2015. 3　　岡山朝日高等学校創立140周年記念号
「万葉の旅」（抄）　杉本尚平
高校物理からFeynman経路積分へ
　― 位相と作用積分・振幅について ―　平松美喜雄
内分点の位置ベクトルの公式の一般化　内田康晴
「県治紀事」で覗う岡山の中等教育の黎明期
　― 史料価値の判断のために ―　後神俊文
文明一七年九月九日起日勝仁親王主催着到和歌の研究　辰田芳雄
新見荘の百姓等申状の役割　辰田芳雄

第37号　2016. 3
教材づくりに関する一考察　―「現代社会」を中心に ―　田中広矛
ICT活用に向けた環境整備と地理教育
　― Google Earth・Dagik Earthを活用した授業実践 ―　竹内直志
明応二年三月三日起日勝仁親王主催着到和歌の翻刻　辰田芳雄
明応の政変前後の新見荘在京代官妹尾重康の役割　辰田芳雄
要約指導における試み　平田丞二

第38号　2017. 3　　岡山藩学校創立350周年記念号
私の制作　河本昭政
岡山藩学校の淵源　田中広矛
新課程大学入試の特徴　― 数学Ⅲ複素数平面分野を探る ―　山川宏史
「絶対値を含む不等式の変形公式」とそのシンプルな証明法　内田康晴
高校物理からFeynman経路積分へ（続）　平松美喜雄
2016年度東京大学入試問題　英語第２問（英作文）の再現答案分析　島村精二
高等学校における主体的・対話的で深い学びの創造　藤原絵美
体育授業「スロージョギング」について　時岡英雄
文明十二年九月一日起日後土御門天皇主催着到和歌の翻刻　辰田芳雄
岡山藩主池田光政・綱政・継政自筆「古文孝経和歌」について　辰田芳雄
二年国語科の要約指導　平田　丞二　橋本　美未　海本真理子　中桐ゆかり

第39号　2018. 3

新しい時代にふさわしい学力の育成	田　中　広　矛
CT数学のウラ技を探る　― マーク試験ゆえの荒技集 ―	山　川　宏　史
学びをつなぐ『化学基礎』の取り組み	守　屋　昌　樹
新しい学習指導要領の理念を踏まえた授業づくりに関する一考察 ― 高等学校における主体的・対話的で深い学びの創造（2）―	藤　原　絵　美
永正二年三月三日起日後柏原天皇主催着到和歌	辰　田　芳　雄
室町・戦国期荘園制を支えた割符 ― 新見荘や北陸など中間地域荘園の事例 ―	辰　田　芳　雄

第40号　2019. 3

私の制作	河　本　昭　政
興味・関心を高め、思考力・表現力などを高める実践例	田　中　広　矛
東大複素数平面問題を多面的に探る	山　川　宏　史
電磁誘導	田　中　初四郎
後柏原天皇主催着到和歌の特徴 ― 永正三年と永正十六年の着到和歌を事例に ―	辰　田　芳　雄
新見荘代官祐成の中間太郎衛門について	辰　田　芳　雄

※第１号から第20号までは第20号に、第21号から第29号までは第30号に記載。

編 集 後 記

1980年３月に第１号を上梓して以来、教育と学問は車の両輪と言挙げしつつ連綿と引き続いて今年、第40号の発刊をみるのは喜ばしいことである。記念号にふさわしいだけの原稿を集めることままならぬは編集者の不徳の致すところ、次号の一層の発展を願うばかりである。西日本豪雨災害の年に。（N）

岡 山 朝 日 研 究 紀 要　　第 40 号

The Asahi Bulletin 40,2019

平成 31 年(2019年) 3 月 29 日発行

編　集　者　図 書 課　　出 版・広 報 係

発　行　者　岡山県立岡山朝日高等学校
校長　田 中 広 矛
〒703-8278 岡山市中区古京町2-2-21
電話　086－272－1271

印　刷　者　株式会社 印刷工房フジワラ
岡山市北区丸の内２-11-18