極座標回転体の体積公式をめぐって

山　川　宏　史

岡山朝日研究紀要 第42号（2021年３月）抜刷
〒703-8278 岡山市中区古京町2-2-21

極座標回転体の体積公式をめぐって

山　川　宏　史

1 はじめに

大学入試では，理系学部で定積分を用いた求積問題が出題されることが多い。特にこの種の問題の出来が合否の大きな分かれ目となっている。今回機会を与えられたので，極座標における回転体の体積公式について考察を加えてみることにした。なお，以前には栃木県柳田五夫先生がこの公式の詳しい証明を業界紙(参考文献[1])で発表されていたが，難解ゆえ易しく明快な証明を試みた。計算問題として京都大学など超難関大学においても出題されているのは，特筆されることであろう。

2 公式とその証明

■公式■

2 直線 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta\,(0\leqq\alpha<\beta\leqq\pi)$ とその間における曲線 $r=f(\theta)$ で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta}r^3\sin\theta\,d\theta$$

▲証明▲

θ が微小量 $\Delta\theta$ だけ変化したとき，囲まれた部分の面積の変化量 ΔS は三角形の面積で近似され

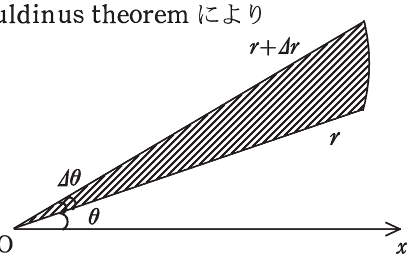
$$\Delta S=\frac{1}{2}r\cdot(r+\Delta r)\sin\Delta\theta$$

とほぼ同じである。また，この三角形の重心の y 座標は

$$y=\frac{1}{3}\{0+r\sin\theta+(r+\Delta r)\sin(\theta+\Delta\theta)\}$$

である。この三角形を x 軸の周りに 1 回転させたものが，求める体積の変化量 ΔV である。

$0\leqq\alpha<\beta\leqq\pi$ であるから，$\sin\theta\geqq0$ であることとPappus−Guldinus theorem により



$$\begin{aligned}\Delta V&\fallingdotseq 2\pi y\cdot\Delta S\\&=\frac{1}{3}\pi\{r\sin\theta+(r+\Delta r)\sin(\theta+\Delta\theta)\}r(r+\Delta r)\sin\Delta\theta\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}\frac{dV}{d\theta}&=\lim_{\Delta\theta\to0}\frac{\Delta V}{\Delta\theta}\\&=\lim_{\Delta\theta\to0}\left[\frac{1}{3}\pi\{r\sin\theta+(r+\Delta r)\sin(\theta+\Delta\theta)\}r(r+\Delta r)\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\right] \quad \leftarrow \text{等号であることに注意}\\&=\frac{1}{3}\pi\cdot2r\sin\theta\cdot r^2\cdot1\\&=\frac{2}{3}\pi r^3\sin\theta\end{aligned}$$

したがって，求める体積 V は　$V=\dfrac{2}{3}\pi\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}r^3\sin\theta\,d\theta$　終

@ 何と簡単。x 軸方向に積分しようとすると，回転の外側，内側の区別が複雑で対応困難に。また，θ が $\dfrac{\pi}{2}$ を超えるかどうかで状況が大きく変化することも困難な要因に。なお，$0 \leqq \alpha < \beta \leqq \pi$ の条件は区間が回転軸に跨がらないことにも効いている。ただし，証明に Pappus−Guldinus theorem を用いたので，これの特殊な三角形版を次章で証明しておく。

特別な $r=R$ (定数) の場合には $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$ となり，球の体積公式と一致することが瞬殺でわかる。

したがって，球の体積公式の一般化になっている。昨年，これらの事実を本校最高の卒業生であるマスオ君に伝えたところ，早速 web 記事 (参考文献 [2]) に採用してくれた。この web 記事は参考になることが多く，私もよく勉強させて戴いている。出藍の誉れとはこのこと。さらに，謙虚な彼は「高校時代の恩師に教えてもらった」と記事に正直に書いている点はさすが。『超ディープな算数の教科書』が新著として世に出たことは記憶に新しい。師匠と弟子の会話形式で数学･算数の諸問題の解明が進んでいく展開が目新しい。もちろん，本校図書館カウンターには直筆サイン入りで展示されている。今後ますますの活躍が期待される。

3 Pappus−Guldinus theorem 三角形版の証明

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ の前後で面積を分けることにより，2 点 A，B が第 1 象限にあると仮定してよい。

■定理■

> △OAB があり，2 点 A，B は第 1 象限にあるとする。△OAB を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V は
>
> $V=$(重心 G が描く円周の長さ)･△OAB

▲証明▲

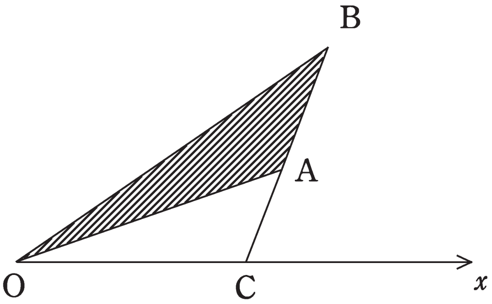
点 B が直線 OA より上方にあるとしても一般性を失わない。

すなわち，A$(a,\ b)$，B$(c,\ d)$ $(a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0,\ ad-bc>0)$ とする。

△OAB の重心 G の y 座標は $\dfrac{b+d}{3}$ であるから

$$(\text{重心 G が描く円周の長さ})\cdot\triangle\text{OAB}=2\pi\cdot\frac{b+d}{3}\cdot\frac{1}{2}(ad-bc)$$

$$=\frac{\pi}{3}(b+d)(ad-bc)\ \cdots\cdots \text{①}$$



i) $a=c$ のとき

$$V=\frac{\pi}{3}d^2a-\frac{\pi}{3}b^2a$$

$$=\frac{\pi}{3}a(d-b)(d+b)$$

となり，これは ① と一致する。

ii) $b=d$ のときも同様にして，① と一致する。

iii) $a<c$ のとき

直線 AB と x 軸の交点を C とすると，平行線と比の関係により

CA:CB$=b:d$，CA:AB$=b:(d-b)$

などから，体積を分割すると

$V=(\mathrm{OB}の回転)-(\mathrm{OA}の回転)-(\mathrm{CB}の回転)+(\mathrm{CA}の回転)$ ← 体積の重複などを考慮

$$=\frac{\pi}{3}d^2c-\frac{\pi}{3}b^2a-\frac{\pi}{3}d^2\cdot\frac{d(c-a)}{d-b}+\frac{\pi}{3}b^2\frac{b(c-a)}{d-b}$$

$$=\frac{\pi}{3}d^2\left\{c-\frac{d(c-a)}{d-b}\right\}-\frac{\pi}{3}b^2\left\{a-\frac{b(c-a)}{d-b}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{3}d^2\cdot\frac{ad-bc}{d-b}-\frac{\pi}{3}b^2\cdot\frac{ad-bc}{d-b}$$

$$=\frac{\pi}{3}(b+d)(ad-bc)$$

iv) $a>c$，$b<d$ のとき

直線 AB と x 軸の交点を C とすると，平行線と比の関係により

CA:CB$=b:d$，CA:AB$=b:(d-b)$

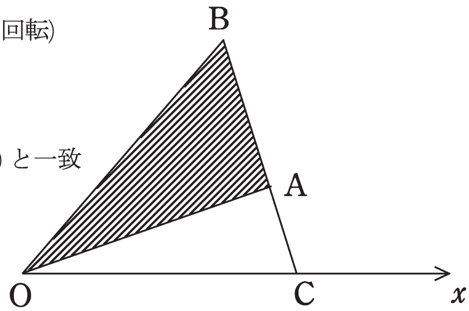
などから

$V=(\mathrm{OB}の回転)+(\mathrm{CB}の回転)-(\mathrm{OA}の回転)-(\mathrm{CA}の回転)$

$$=\frac{\pi}{3}d^2c+\frac{\pi}{3}d^2\frac{d(a-c)}{d-b}-\frac{\pi}{3}b^2a-\frac{\pi}{3}b^2\cdot\frac{b(a-c)}{d-b}$$

$$=\frac{\pi}{3}d^2\left\{c-\frac{d(c-a)}{d-b}\right\}-\frac{\pi}{3}b^2\left\{a-\frac{b(c-a)}{d-b}\right\}$$ ← iii) と一致

$$=\frac{\pi}{3}(b+d)(ad-bc)$$



v) $a>c$，$b>d$ のとき

直線 AB と x 軸の交点を C とすると，平行線と比の関係により

CA:CB$=b:d$，CB:CA$=(b-d):b$

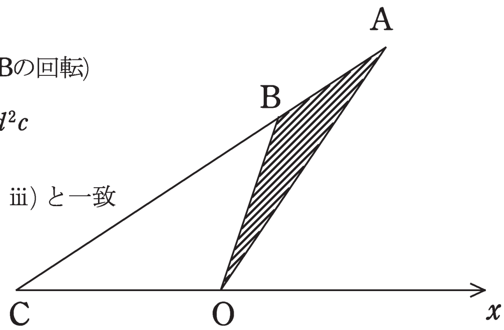
などから

$V=(\mathrm{CA}の回転)-(\mathrm{CB}の回転)-(\mathrm{OA}の回転)+(\mathrm{OB}の回転)$

$$=\frac{\pi}{3}b^2\frac{b(a-c)}{b-d}-\frac{\pi}{3}d^2\frac{d(a-c)}{b-d}-\frac{\pi}{3}b^2a+\frac{\pi}{3}d^2c$$

$$=\frac{\pi}{3}d^2\left\{c-\frac{d(c-a)}{d-b}\right\}-\frac{\pi}{3}b^2\left\{a-\frac{b(c-a)}{d-b}\right\}$$ ← iii) と一致

$$=\frac{\pi}{3}(b+d)(ad-bc)$$



以上から示された。 終

@ 状況は全く異なるが，結果がすべて一致する点が面白い。真面目に円錐台の体積を用いないのがうまい計算のポイントかと。平行線と比の関係は使える。

ただし，積分の上下端が 0，$\frac{\pi}{2}$，π 以外になると，円錐の体積が自然に加えられたり，減じられていることにも注意しておこう。実際に $r=R$（定数）の場合に積分区間を $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ で計算してみると値が $\pi\int_{\frac{R}{2}}^{R}(R^2-x^2)dx$ よりも円錐の分だけ大きいことがわかる。次に，この公式を用いた計算例について述べていくことにしよう。

4 問題例

■問題 1■

リマソン $r=a+b\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。ただし，$a>b>0$ とする。

▲公式を用いた一発解答▲

曲線は，始線 x 軸に関して線対称であるから，求める体積 V は

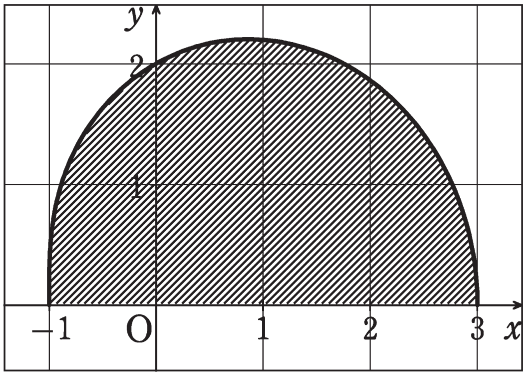
$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi}(a+b\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\pi\left[-\frac{1}{4b}(a+b\cos\theta)^4\right]_0^{\pi} \quad (\because b\neq 0 \text{ より})$$

$$=\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{1}{4b}\{(a+b)^4-(a-b)^4\}$$

$$=\frac{\pi}{6b}(8a^3b+8ab^3)$$

$$=\frac{4}{3}\pi a(a^2+b^2) \quad \text{答}$$



@ $a>b$ の条件は必要。さもなくば，原点に関して逆側にも曲線を描くことに。なお，$0<b\ll a$ の場合の回転体は球に近づき，答えの b を neglect した $\frac{4}{3}\pi a^3$ と一致し，整合性があることもわかる。この点は，回転楕円体と球の体積の関係と同様。直交座標に変換すると，$x=(a+b\cos\theta)\cos\theta$，$y=(a+b\cos\theta)\sin\theta$ となり，$\frac{dx}{d\theta}$ が煩雑になるので計算はかなり面倒に。救いは，$\cos\theta$ の整式に $\sin\theta$ が掛けられた式の定積分ゆえ，整式の展開さえできれば，瞬間置換積分により計算可能であることは保証される。しかし，a と $2b$ の大小関係により x の単調性が変わってくるので，曲線の概形が異なり，定積分の立式上では大問題に。実際の過去問としては，2009年度京都大学に $a=2$，$b=1$（上図），2011年度名古屋市立大学に $a=b=2$ (cardioid) で出題されていた。極座標回転体公式を用いない場合，x の単調性がある京都大学の問題のほうが定積分の立式上は易。ただし $\theta=\pi$ 付近における曲線の振る舞いに注意。名古屋市立大学の問題は x が減少して増加するので，体積の和や差をとる必要があり，定積分の立式にも注意が必要。不慣れな受験生には対応がやや厳しい。もちろんこの公式を用いた答案は不可であろう。あくまで検算用に用いるべきかと。

■問題 2■

曲線 $r=\cos^t\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2})$ を x 軸の周りに 1 回転した図形で囲まれる立体の体積を求めよ。ただし，$t>0$ とする。

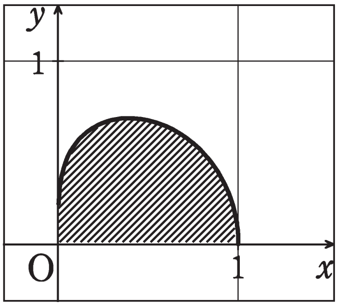
▲公式を用いた一発解答▲

求める体積 V は

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{3t}\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\pi\left[-\frac{1}{3t+1}\cos^{3t+1}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad (\because t>0 \text{ より})$$

$$=\frac{2\pi}{3(3t+1)} \quad \text{答}$$



@ $t=1$ の場合は半径 $\frac{1}{2}$ の球の体積となり，整合性がある。直交座標に変換すると，$x=\cos^{t+1}\theta$，$y=\cos^{t}\theta\sin\theta$ となり，$\cos\theta$ の単項式になるので瞬間置換積分により十分に計算可能。この公式の御利益はない。実際の過去問としては，2012年度慶應義塾大学医学部に $t=\frac{1}{3}$ (上図)，区間 $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ で出題されていた。原題では，最初に公式を証明させ，さらに直線 $\theta=\frac{\pi}{4}$ の周りの回転体体積が問われていた。原点を通る一般の直線周りの回転体ゆえ汎用性が高く，作品として完結している。さすがは，慶應医学部。研修医の一部は新型コロナをも恐れぬらしい。すべて穴うめ問題であったが，超難問か。以上の 2 問をまとめると，次のようになる。

■系■

$a\geqq0$，$b\geqq0$，$t\geqq0$ とする。曲線 $r=(a+b\cos\theta)^t$ $(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2})$ と両座標軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転した立体の体積を求めよ。

▲公式を用いた一発解答▲

ⅰ) $b>0$ のとき

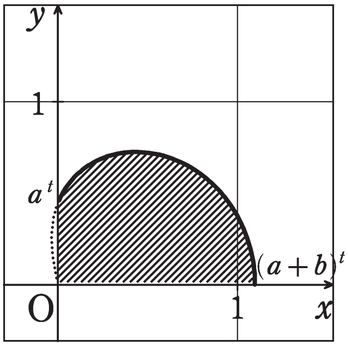
求める体積 V は

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a+b\cos\theta)^{3t}\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\pi\left[-\frac{1}{b(3t+1)}(a+b\cos\theta)^{3t+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad (\because b\neq0 \text{ より})$$

$$=\frac{2\pi}{3b(3t+1)}\{(a+b)^{3t+1}-a^{3t+1}\}$$

$$=\frac{2\pi}{3(3t+1)}\sum_{k=0}^{3t}(a+b)^{3t-k}a^k$$ ← ここまで求めたのは，ⅱ) との関連上



ⅱ) $b=0$ のとき

図形は半径 a^t の半球であるから，その体積は $\frac{2}{3}\pi a^{3t}$ であり，ⅰ) の結果に含まれる。

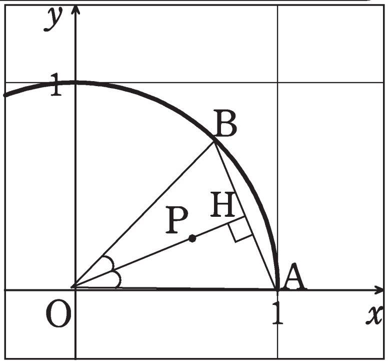
以上から，求める体積は $\frac{2\pi}{3(3t+1)}\sum_{k=0}^{3t}(a+b)^{3t-k}a^k$ 答

@ $b>0$，$t=1$ で積分区間が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の場合が問題 1，$a=0$，$b=1$ の場合が問題 2 となっていることがわかる。

■問題 3■

θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とし，原点 O，A(1，0)，B($\cos 2\theta$，$\sin 2\theta$) を頂点とする △OAB の内接円の中心を P とする。θ がこの範囲を動くときに，点 P が描く曲線と線分 OA によって囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

▲公式を用いた解答▲



原点 O から辺 AB に引いた垂線の足を H とすると

$\mathrm{OH}=\cos\theta$

$\mathrm{OP}:\mathrm{PH}=\mathrm{AO}:\mathrm{AH}=1:\sin\theta$ であるから

$\mathrm{OP}=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$　　← 内心を求める定石

よって，点 P の極方程式は　$r=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

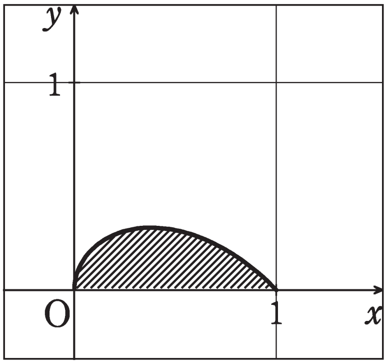
求める体積 V は

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3\theta}{(1+\sin\theta)^3}\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)^2}\cos\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta+2\sin\theta+1-3\sin\theta-3+2}{(\sin\theta+1)^2}\cos\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1-\frac{3}{\sin\theta+1}+\frac{2}{(\sin\theta+1)^2}\right\}\cos\theta\,d\theta$$



$$=-\frac{2}{3}\pi\left[\sin\theta-3\log(\sin\theta+1)-\frac{2}{\sin\theta+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{2}{3}\pi(1-3\log 2-1+2)=\pi\left(2\log 2-\frac{4}{3}\right)$$ 答

@ $\log 2 \fallingdotseq 0.69$ は常識 (昨春東大理科 I 類に +83.0点で大合格した生徒の言，求め方は章末に記載) ゆえ，答えの数値は 0 に近く整合性が高いことが瞬時にわかる。素直に，$1+\sin\theta=t$ とおいて置換積分に走ってもよい。本問は，2020年度神戸大学前期理系第 2 問に出題されていたことは記憶に新しいが，原題には (1) として

「点 P の座標は ($1-\sin\theta$，$\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}$) で表されることを示せ。」

という品格に欠けるヒントがついていて，(2) で回転体の体積を問うていた。これが 120 分 5 問神戸大学の限界か。

ちなみに，原題の流れを尊重して (2) の体積を計算すると

$\dfrac{dx}{d\theta}=-\cos\theta$ であるから

$$V=\pi\int_0^1 y^2\,dx$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}(-\cos\theta)d\theta$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^3\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta+1}\cos\theta\,d\theta$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^3\theta+\sin^2\theta-2\sin^2\theta+2\sin\theta+2\sin\theta+2-2}{\sin\theta+1}\cos\theta\,d\theta$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\sin^2\theta-2\sin\theta+2-\frac{2}{\sin\theta+1}\right)\cos\theta\,d\theta$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}\sin^3\theta-\sin^2\theta+2\sin\theta-2\log(\sin\theta+1)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$=-\pi\left(\frac{1}{3}-1+2-2\log 2\right)=\pi\left(2\log 2-\frac{4}{3}\right)$$ 答

となり，同様な量の定積分の計算となる。しかし，x の単調減少性を述べておく必要がある。また，もし単調性がない場合の問題であれば，体積の和や差をとる必要も発生，定積分の立式が煩雑に。

■問題 3’■

問題 3 の回転軸が y 軸になるとどうか。

まず，回転軸を一般化した次の公式が成り立つ。

■回転軸を一般化した公式■

θ_0 を $0\leqq\theta_0\leqq\pi$ を満たす定数とする。2 直線 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta\ (\theta_0\leqq\alpha<\beta\leqq\theta_0+\pi)$ とその間における曲線 $r=f(\theta)$ で囲まれた部分を 直線 $\theta=\theta_0$ の周りに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_{\alpha-\theta_0}^{\beta-\theta_0}\{f(\theta+\theta_0)\}^3\sin\theta\,d\theta$$

▲証明▲　最初の公式の状況において，図全体を原点の周りに $-\theta_0$ 回転すればよい。 終

▲一般化した公式を用いた解答▲

公式で，$\theta_0=-\dfrac{\pi}{2}$ とすると

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_{0-(-\frac{\pi}{2})}^{\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})}\left\{\frac{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\right\}^3\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^3\theta}{(1-\cos\theta)^3}\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos\theta}d\theta$$

$$=-\frac{2}{3}\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos^2\theta+2\cos\theta-3+4}{\cos\theta-1}d\theta$$

$$=-\frac{2}{3}\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\cos\theta+3-\frac{4}{1-\cos\theta}\right)d\theta$$

$$=-\frac{2}{3}\pi(\left[\sin\theta+3\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{4}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta)$$

$$=-\frac{2}{3}\pi(-1+\frac{3}{2}\pi+\left[4\cot\frac{\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi})$$

$$=-\frac{2}{3}\pi(-1+\frac{3}{2}\pi-4)=\frac{\pi}{3}(10-3\pi)$$ 答

@ 答えの数値は 0 に近く整合性があることが瞬時にわかる。さらに，x 軸周りの回転よりも体積が大きいことが予想されるが，それをも満たすこともわかる。前述の 2012年度慶應義塾大学医学部に特殊な $\frac{\pi}{4}$ 回転の場合が出題されていた。また，反時計回りに回転させた理由は，時計回りの回転なら $\sin\theta\leqq 0$ となってしまうのを避けたからである。実際に原点の周りに $-\frac{\pi}{2}$ 回転して回転させた解答を次に記載すると

極方程式は $r=\dfrac{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$ すなわち $r=-\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ となるので，求める体積 V は

$$V=-\frac{2}{3}\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^3\theta}{(1+\cos\theta)^3}|\sin\theta|d\theta$$ ← この絶対値を忘れると，体積が負になってしまう！

$$=\frac{2}{3}\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(1-\cos\theta)^2}{1+\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^2\theta-2\cos\theta-3+4}{\cos\theta+1}d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\cos\theta-3+\frac{4}{\cos\theta+1}\right)d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\pi(\left[\sin\theta-3\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{4}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta)$$

$$=\frac{2}{3}\pi(1-\frac{3}{2}\pi+\left[4\tan\frac{\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0})$$

$$=\frac{2}{3}\pi(1-\frac{3}{2}\pi+4)=\frac{\pi}{3}(10-3\pi)$$ 答

となり，ほぼ同様な計算となる。絶対値さえ忘れなければ，最後の原始関数が tan になり計算しやすい。ちなみに公式を用いず強引な計算を試みると，次のような計算地獄になってしまう。

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(1+\sin\theta)-\sin\theta\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}$$

$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta-\sin^3\theta}{(1+\sin\theta)^2}$$

$$=\frac{1-\sin^2\theta-\sin^2\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)^2}$$ ← この変形がポイント

$$=\frac{1-\sin\theta-\sin^2\theta}{1+\sin\theta}$$ ← 見事に約分

y の最大値を M，そのときの θ の値を α とし，

$0\leqq\theta\leqq\alpha$ のときの x を x_1，$\alpha\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のときの x を x_2 とすると，求める体積 V は

$$V=\pi\int_0^M x_1{}^2dy-\pi\int_0^M x_2{}^2dy$$

$$=\pi\int_0^{\alpha} x_1{}^2\frac{dy}{d\theta}d\theta-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} x_2{}^2\frac{dy}{d\theta}d\theta$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)^2\cdot\frac{1-\sin\theta-\sin^2\theta}{1+\sin\theta}d\theta$$

$$=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta-1)^2\cdot\frac{\sin^2\theta+\sin\theta-1}{\sin\theta+1}d\theta$$

$$=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta-1)^2\left(\sin\theta-\frac{1}{\sin\theta+1}\right)d\theta$$ ← 後半だけを変形

$$=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3\theta-2\sin^2\theta+\sin\theta-\frac{\sin^2\theta-2\sin\theta+1}{\sin\theta+1}\right)d\theta$$ ← うまく展開

$$=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3\sin\theta-\sin3\theta}{4}-1+\cos2\theta+\sin\theta-\frac{\sin^2\theta-2\sin\theta-3+4}{\sin\theta+1}\right)d\theta$$ ← 次の準備

$$=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{3\sin\theta-\sin3\theta}{4}-1+\cos2\theta+\sin\theta-(\sin\theta-3)-\frac{4}{\sin\theta+1}\right\}d\theta$$ …… ①

$$=-\pi\left[-\frac{3}{4}\cos\theta+\frac{1}{12}\cos3\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta+2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$=-\pi\{\pi-(-\frac{3}{4}+\frac{1}{12})\}+\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}d\theta$$

$$=-\pi(\pi+\frac{2}{3})+\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}d\theta$$ ← 分母を単項式にするのがポイント

$$=-\pi(\pi+\frac{2}{3})+4\pi\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\pi(\pi+\frac{2}{3})+4\pi(0+1)=\frac{\pi}{3}(10-3\pi)$$ 答

読者の中には，① の最後の項の定積分がかなり技巧的に思われる向きがあるかもしれない。そこで

$$\int\frac{1}{\sin\theta+1}d\theta=\int\frac{1-\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}d\theta \quad \cdots\cdots ②$$

$$=\int\frac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\tan\theta-\frac{1}{\cos\theta}+C \quad (C\text{は積分定数})$$

$$=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta}+C$$

$$=\frac{\sin^2\theta-1}{(\sin\theta+1)\cos\theta}+C \quad \cdots\cdots ③$$

$$=-\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+C \quad \cdots\cdots ④$$

と，まず不定積分を求めておいてから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta+1}d\theta=-\left[\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-(0-1)=1$$

とすると易しい解法でご納得いただけるであろうか。

わざわざ不定積分を求めた理由は，次の通り。② の左辺は $\theta\fallingdotseq\frac{3}{2}\pi+2n\pi$，右辺は $\theta\fallingdotseq\frac{\pi}{2}+n\pi$ の条件がつき，右辺の条件が ③ まで続く。約分のおかげで ④ は $\theta\fallingdotseq\frac{3}{2}\pi+2n\pi$ となって元に戻る。元の定積分の上端が $\theta=\frac{\pi}{2}$ である以上は，分母が 0 になるような定積分を避けたわけである。これを回避しようとすれば，広義積分でするしかない。大学の範囲であるが，lim のよい練習ではある。

この分数式に既視感があった。某教科書には，章末問題に

$y=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$ を微分せよ。　(答え $y'=-\frac{1}{1+\sin\theta}$)

という微分の計算問題があった。これを暗記する価値はないので，かような計算を試みるしかない。

これは，$\frac{1}{1-\sin\theta}$ や $\frac{1}{1+\cos\theta}$，$\frac{1}{1-\cos\theta}$ にも適用できる (分母が 0 にならぬ積分区間限定)。

$\frac{1}{1+\tan\theta}$ は $\theta=\frac{\pi}{2}$ のときは定義できない。$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$ なら $p=\frac{\pi}{2}-\theta$ の置換により求まるのは教科書応用レベル。完解した後で定番の $t=\tan\frac{\theta}{2}$ の置換を試みると，激しい分数式の積分計算になり，困難。そこで，初心に立ち返った解答にやっと辿り着いた。

▲最後に降臨した一発解答▲

バウムクーヘン積分により，求める体積 V は

$$V=2\pi\int_0^1 xy\,dx$$

$$=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} xy\frac{dx}{d\theta}d\theta$$

$$=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\sin\theta)\cdot\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}(-\cos\theta)d\theta$$

$$=2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)^2\sin\theta\, d\theta$$

$$=2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\theta-1+\cos2\theta+\frac{3\sin\theta-\sin3\theta}{4}\right)d\theta$$

$$=2\pi\left[-\cos\theta-\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta-\frac{3\cos\theta}{4}+\frac{\cos3\theta}{12}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\pi(1-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{12})=\frac{\pi}{3}(10-3\pi)$$ 答

@ やはり，いろいろな公式を用いて試してみる価値はあるようだ。まさに足下を掬われた感じである。さまざまな定積分に紙と鉛筆で苦労した後，これを思いついたのは昨年卯月曙臥床の瞬間。いつもの如く我ながら情けないと痛感した。ついでに極座標回転体表面積公式もつくることができると確信した。これは読者諸賢で。やはり，Johann Carl Friedrich Gauss (1777.4.30～1855.2.23) は偉大な超傑物。

$\boxed{\text{オマケコーナーその1}}$ $\log 2 \fallingdotseq 0.69$ の求め方について　　　秘伝の技ゆえ，本邦初公開!

$e\fallingdotseq 2.7=\dfrac{3^3}{10}$ より　　← この近似がポイント

$$\log 2=\frac{\log_{10}2}{\log_{10}e}\fallingdotseq\frac{\log_{10}2}{3\log_{10}3-1}$$

$\log_{10}2\fallingdotseq 0.3010$，$\log_{10}3\fallingdotseq 0.4771$ より

$$\log 2\fallingdotseq\frac{0.3010}{3\cdot0.4771-1}=\frac{0.3010}{0.4313}=0.69789\cdots\cdots$$

@ e をなるべく簡単な分数で近似した。誤差率は 0.66…… % ゆえ，結構よい近似かと。実際の値は $\log 2=0.693147\cdots\cdots$ であり，誤差率が影響しているが，小数第 2 位までは正しいことがわかる。さらに凝った近似として

$$e\fallingdotseq 2.72=\frac{2^4\cdot17}{10^2}=\frac{2^4\cdot51}{3\cdot10^2}=\frac{2^4\cdot2499}{3\cdot49\cdot10^2}\fallingdotseq\frac{2^4\cdot50^2}{3\cdot7^2\cdot10^2}=\frac{2^4\cdot5^2}{3\cdot7^2}=\frac{2^2\cdot10^2}{3\cdot7^2}$$ ← $49\cdot51=2499$ を用いた!

とすれば，より高い精度の近似 $\log 2\fallingdotseq 0.6924315\cdots\cdots$ となることもわかる。これは

$$(10n-1)(10n+1)=100n^2-1$$

となることに由来する。例えば，つぎのような素因数分解にも用いることができる。

$$3599=60^2-1=59\cdot61$$

また，前述の議論を一般化すると

$$\log x\fallingdotseq\frac{\log_{10}x}{0.4313}\quad\cdots\cdots ①$$

となり，$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$，$\log_{10}3 \fallingdotseq 0.4771$，$\log_{10}7 \fallingdotseq 0.8451$ さえ覚えておけば，案外使えることもわかる。$\log_{10}7$ の近似値の求め方は後述。お恥ずかしいことであるが，この方法は近年気づいたことである。私も未だに発展途上人。今宵も枕を濡らして反省を。

$\boxed{\text{オマケコーナーその 2}}$　$e^{\pi} \fallingdotseq 23$ の求め方について　　　これも秘伝の技!

$e^{\pi}=x$ とおくと　$\log x=\pi$　① を用いて順次 x に数値を代入して調べていく。

$x=25$ のとき　$\log 25 \fallingdotseq \dfrac{2\log_{10}5}{0.4313} \fallingdotseq \dfrac{2(1-0.3010)}{0.4313}=3.2413633\cdots\cdots$

$x=24$ のとき　$\log 24 \fallingdotseq \dfrac{3\log_{10}2+\log_{10}3}{0.4313} \fallingdotseq \dfrac{0.9030+0.4771}{0.4313}=3.1998608\cdots\cdots$

$x=23$ のときは困るが，$23=\dfrac{161}{7} \fallingdotseq \dfrac{160}{7}$ の近似で　← この近似がポイント

$$\log 23 \fallingdotseq \frac{\log_{10}\frac{160}{7}}{0.4313} \fallingdotseq \frac{4\log_{10}2+1-\log_{10}7}{0.4313} \fallingdotseq \frac{1.2040+1-0.8451}{0.4313}=3.1507071\cdots\cdots$$

よって　$e^{\pi} \fallingdotseq 23$　(ただし，この近似では $e^{\pi}<23$ になってしまう!)

@ 23 をこの分数で近似した。誤差率は 0.625 % ゆえ，結構よい近似かと。$\log_{10}e$ をもっとよい近似にしておくと，$e^{\pi}>23$ まではわかる。$e^{\pi}=23.1406926\cdots\cdots$ が実際の値である。同様にして，π^{e} の近似も可能である。しかし

$\pi \fallingdotseq \sqrt{10}$，$\log_{10}22.5$

が必要になるので，直感では厳しい。ちなみに，π^{e} の値を 100 万桁記載した本 (参考文献 [3]) や同秘密結社のサイトによると

$\pi^{e}=22.4591577183\ 6104547342\ 7152204543\ 7350275893\ 1513399669\ 2249203002\ 5540669260$
$4039911791\ 2318519752\ 7271430315\ 3145007314\ 8896372716\ 6541627272\ 0003684124\cdots\cdots$

となるそうで，2 つの数値は結構接近していることがわかる。旧六医大合格の生徒 4 名が卒業時にこの怪しげな書物を贈呈してくれて，拙宅書斎に。この 2 数の大小関係は多大学で入試頻出問題に。

$\boxed{\text{オマケコーナーその 3}}$　$\log_{10}7 \fallingdotseq 0.845$の求め方について　　　これも秘伝の技!

$7^4=2401 \fallingdotseq 2400$ であるから　　← この近似がポイント

$$\log_{10}7=\frac{1}{4}\log_{10}2400=\frac{1}{4}(3\log_{10}2+\log_{10}3+2)$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{4}(0.9030+0.4771+2)=0.845025 \fallingdotseq 0.845$$

@ 誤差率は 0.04166…… % で小数第 3 位まで正しく，$7^4=2401$ は使える。下 2 桁が「01」となるので整数問題等の作問にも使用できる。これは，$(50n \pm 1)^2$ の展開式に由来している。このほかにも

$3^{10}=59049$ は常識ゆえ，3^{20} の下 2 桁も「01」

よって，7^{4n}，3^{20n}，9^{10n} の下 2 桁は「01」

$2^{10}=1024$，$2^{20}=1048576$ は常識ゆえ，2^{22} の下 2 桁は「04」

よって，2^{22} 以降は下 2 桁が循環節の長さ 20 で繰り返す。これを一般化すると次のことがわかる。

任意の自然数 N, n に対して次のような自然数 k が存在する。

「N を順次累乗していくと，N^k から下 n 桁の数字が循環する」

この問題を昨年度3年生に校内実力考査で出題した。pigeonhole principle により証明できるが，残念ながら誰もできなかった。かように誰もできぬ問題をたまに出題するのも良き教育かと。

オマケコーナーその4　極座標回転体表面積公式

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r\sin\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

@ 証明略。例えば，$r=R$，$\alpha=0$，$\beta=\pi$ や $r=R\cos\theta$，$\alpha=0$，$\beta=\dfrac{\pi}{2}$ では球の表面積公式と一致する。

5 授業等における適度(適切とはやや異なる)な指導について

私の授業では，極座標面積公式も扱うことにしている。教科書には掲載されていないので，タイムリーな演習時に公式をこちらで板書して，計算比較対照実験を。cardioid などでは，絶大な威力がある。その後，生徒に証明を問いかけることに。1名でも正解者が出たクラスのみ，正解者に板書を促して説明もさせる楽しい授業を。残念ながら正解者の出なかったクラスには「このクラスは残念やな」と言葉を残して，しれっと次に進むことに。教えすぎぬことで生徒は焦るので，これも良き教育かと。放課後あたりに，教室で数名の生徒が黒板を用いて議論する姿も散見された。

しかし，今回の極座標回転体体積公式を平日補習で紹介したところ，前述の東大理科Ⅰ類に大合格した生徒や京大理学部特色入試の僅か5名の合格者になった生徒でも証明できず，永遠の謎で終わった。ただし，「今の世の中，net で検索すれば……」などと呟いてその日は終わった。実は私も近年この公式を知り，柳田先生に対抗して証明を考えた次第。天賦の才に恵まれぬ筆者は鈍牛の如く努力するのみ。かように，指導する側が日夜研究することは重要であるし，自らの成長にもつながる。皆さん，お互い謙虚に切磋琢磨いたしましょう。

本論文の証明アイディアは筆者の休日の遠距離ロードにおける思考の賜物。無理数の近似値を考えながらのロードもまた一興かと。この永年の涙ぐましい日夜の鍛錬により，暗算能力は格段の進歩をみた。

本論文に建設的ご指導をくださった鳥取県米子東高等学校奥田俊一朗先生には格段の感謝を，そして最後になりましたがお読みくださった読者の皆様と発表の機会を与えてくださった編集委員の先生方に感謝いたします。これで私も思い残すことなく退職できるかと。永年にわたりお導きくださった諸先生方や生徒諸君そして我が家族には，お世話になり本当にありがとうございました。

E−mail:yamakawa2005jp@yahoo.co.jp

参考文献

[1]　柳田五男　「極座標における回転体の体積の公式について」　数研通信　2012年

[2]　マスオ　『高校数学の美しい物語』　SB Creative の web 版

[3]　暗黒通信団『π の e 乗百万桁』　真実のみを記す会　2013年　(永遠に絶版か)　および同サイト