

高校物理へのFeynman経路積分の適用

— 様々なポテンシャル中での運動 —

平 松 美 喜 雄

高校物理へのFeynman経路積分の適用

—様々なポテンシャル中での運動—

平松美喜雄

はじめに

高校物理「原子の世界」の単元で学習するように、原子・電子を対象とするようなミクロの世界では、粒子の振る舞いは波動により記述される。ボーアの水素原子モデルのような前期量子論では、電子の運動は古典力学に量子の考えを取り入れた波動で表されるが、正確にはシュレディンガー波動方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H\psi(x, t) \quad (\text{A.1})$$

により表現される。ここで $\psi(x, t)$ は波動関数、 H はハミルトン演算子である。この式は波動関数 $\psi(x, t)$ に関する微分方程式で示されているが、一方で波動関数 $\psi(x, t)$ を次の積分形

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 K(x, t) \psi(x_0, t_0) \quad (\text{A.2})$$

で書き表すことも可能で、この様に表したものがFeynman経路積分による表現である。ここで $K(x, t)$ は、確率振幅とか単に振幅や積分核、あるいはFeynman核と呼ばれており、Feynman経路積分の中心的役割を担うべきものである。 $\psi(x_0, t_0)$ は初期状態での波動関数で、積分核 $K(x, t)$ の具体的な形がわかれば、この積分により任意の時刻での波動関数を求めることができる。この積分の意味することは、初期状態のある波源 $\psi(x_0, t_0)$ があり、この波源から積分核 $K(x, t)$ を掛けた波動が四方八方全ての方向に出て行く。それらの波動を全て集めたものが任意の時刻、場所における波動関数 $\psi(x, t)$ である、ということである。この考えは波源から出てくる具体的な波動を思い浮かべ、それらを足し合わせるという描像をイメージできるという点で非常に優れている方法であり、高校生にも理解できる考え方である。高校物理「波動」における波の重ね合わせや光の干渉の考えと相通ずるものがあると思われる。この積分を具体的に計算するためには積分核 $K(x, t)$ が必要であり、そのためには、まずそれに先立ち作用積分 S を求めなければならない。作用積分 S はラグランジアン L を時間積分した物理量であり、その際重要なことは、

『ポテンシャルエネルギーが2次以下の項で表すことができる場合、量子論における積分核は古典力学で求めた作用積分から求めることができる』

ということである。実際高校物理で扱うような基本的な運動の場合、ポテンシャルエネルギーは全て2次以下である。つまり、高校物理の基本的な運動においては、量子力学による波動関数を、古典力学に基づき求めることができるということである。このことにより積分核 $K(x, t)$ は、単純に古典軌道から求めた作用積分 S を用いて

$$K(x, t) = N \int_{t_0}^t dt \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S\right\} \quad (N \text{ は規格化因子}) \quad (\text{A.3})$$

の形で表すことができる。

以上のような考えに基づき，前2編「高校物理からFeynman経路積分へ」，「高校物理からFeynman経路積分へ（続）」（以下，「正編」，「続編」と呼ぶ）において，“経路”についての基本的な考え，作用積分 S と，Feynman経路積分の中核をなす積分核 $K(x, t)$ （確率振幅，またはFeynman核）について説明し，高校物理で扱う事象を発展的に考察し，Feynman経路積分へと導き，ミクロの世界でその事象の特徴はどのようにして把握されるかを示した。つまり，「正編」においては，高校物理の光の回折における“道のり”“位相差”の考えを発展させ，Feynman経路積分への考えと至り，①自由粒子②調和振動子（単振動）③場の中で粒子が一定の力を受ける運動④磁場中での荷電粒子の運動の4種の運動についてラグランジアン L から作用積分 S と積分核 $K(x, t)$ を求めた。続いて「続編」では，以上の運動について，停留位相近似を適用することによって，具体的な波動関数を求めることなく運動の概略が得られることを示した。更に本稿では，高校物理で学習する位置エネルギー，つまりポテンシャルエネルギーを考慮し，様々な基本的なポテンシャル中で，ポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）を持ち，運動する粒子の挙動について，その特徴を具体的に確認していきたいと思う。その際，「続編」で用いた停留位相近似を適用し，ミクロの量子論的な現象を古典的な力学モデルで直感的に把握できることを示したいと思う。

以下，「正編」，「続編」で確認した4種類の運動について作用積分 S と積分核 $K(x, t)$ を列挙しておく。ここで，初期条件を $x(t_0) = x_0$ としている。これらの式はⅠ章以下，各章でそれぞれ引用される。

①自由粒子

$$S = \frac{m}{2} \frac{(x - x_0)^2}{t - t_0} \quad (\text{A-I})$$

$$K(x, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_0)}} \exp \left[\frac{im(x - x_0)^2}{2\hbar(t - t_0)} \right] \quad (\text{A-II})$$

②調和振動子（単振動）

$$S = \frac{m\omega}{2\sin\omega(t - t_0)} \{ (x^2 + x_0^2) \cos\omega(t - t_0) - 2xx_0 \} \quad (\text{B-I})$$

$$K(x, t) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin\omega(t - t_0)}} \exp \left[\frac{im\omega}{2\hbar \sin\omega(t - t_0)} \{ (x^2 + x_0^2) \cos\omega(t - t_0) - 2xx_0 \} \right] \quad (\text{B-II})$$

③場の中で粒子が一定の力を受ける運動

$$S = \frac{m}{2(t - t_0)} (x - x_0)^2 + \frac{f(t - t_0)}{2} (x + x_0) - \frac{f^2(t - t_0)^3}{24m} \quad (\text{C-I})$$

$$K(x, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_0)}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m}{2(t - t_0)} (x - x_0)^2 + \frac{f(t - t_0)}{2} (x + x_0) - \frac{f^2(t - t_0)^3}{24m} \right\} \right] \quad (\text{C-II})$$

④磁場中での荷電粒子の運動

$$S = \frac{m}{2} \left[\frac{\omega}{2} \cot \frac{\omega}{2} (t - t_0) \{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \} + \omega (x_0 y - x y_0) \right] \quad (\text{D-I})$$

$$\text{ただし, } \omega = \frac{qB}{m}$$

$$K(x, t) = \left\{ \frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_0)} \right\}^{\frac{3}{2}} \frac{\left\{ \frac{\omega}{2} (t - t_0) \right\}}{\sin \frac{\omega}{2} (t - t_0)} \times \\ \exp \left[\frac{im}{2\hbar} \left[\frac{\omega}{2} \cot \frac{\omega}{2} (t - t_0) \{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \} + \omega (x_0 y - x y_0) + \frac{(z - z_0)^2}{t - t_0} \right] \right] \quad (\text{D-II})$$

I. $V=kx$ 型ポテンシャル中での粒子の運動

このタイプのポテンシャルは図1-1のように 最も基本的なポテンシャルで x の 1 次関数で表される。このとき粒子がポテンシャル中で受ける力 f は、ポテンシャルエネルギー V と力 $\vec{F}$ の関係を表す

$$\vec{F} = -\nabla V \quad (1.1)$$

により求めることができる。ここで ∇ はナブラ演算子である。よって

$$f = -K \quad (1.2)$$

となり、粒子は 常に x 負方向に一定の力を受けて運動することがわかる。最も基本的な運動であり、これに該当する例は、電荷 q の荷電粒子が一律な電場 E から力 $f = -qE$ を受けて運動する場合や、重力場の中

で質量 m をもつ粒子が重力 $f = -mg$ を受ける場合などが教科書に挙げられている。高校物理ではミクロの領域での運動も粒子として表現されているが、現実には波動の形で存在しているので図中のように波動として描いている。

このように外場から一定の力を受けて運動する場合、このときのラグランジアン L は

$$L = K - V \quad (1.3)$$

で定義されるので

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + fx \quad (1.4)$$

と表される。以下、粒子を波動関数として表現し、その運動を停留位相近似により把握する。この詳細は「続編」に記載しているが、ここではその結果を次に簡単にまとめる。

この場合の作用積分 S は、初期条件を $x(t_0) = x_0$ とすると、「はじめに」③場の中で粒子が一定の力を受ける運動(C-1)に示しているように、

$$S = \frac{m}{2(t-t_0)}(x-x_0)^2 + \frac{f(t-t_0)}{2}(x+x_0) - \frac{f^2(t-t_0)^3}{24m} \quad (C-1)$$

で表され、確率振幅 $K(x, t)$ も同様に(C-2)に示されている。

$$K(x, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t-t_0)}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m}{2(t-t_0)}(x-x_0)^2 + \frac{f(t-t_0)}{2}(x+x_0) - \frac{f^2(t-t_0)^3}{24m} \right\} \right] \quad (C-2)$$

まず、初期状態として平面波

$$\psi(x_0, t_0) = A \exp(ikx_0) \quad (1.5)$$

を仮定すると、任意の時刻 t における波動関数は次のようになる。

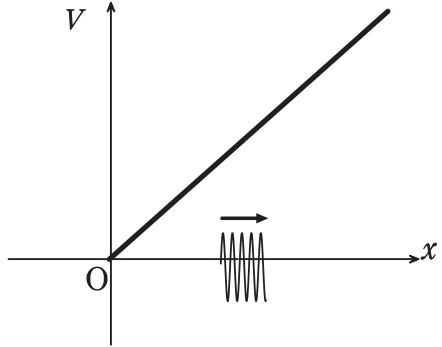


図1-1

$$\psi(x, t) = \int dx_0 A \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_0)}} \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m}{2(t - t_0)} (x - x_0)^2 + \frac{f(t - t_0)}{2} (x + x_0) - \frac{f^2(t - t_0)^3}{24m} + \hbar k x_0 \right\} \right] \quad (1.6)$$

である。ここで初期条件を $t_0 \rightarrow t_i$, $x_0 \rightarrow x_i$ と置き換え, 更に $t - t_i = T$ と置くと

$$\psi(x, T) = \int dx_i A \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar T}} \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m}{2T} (x - x_i)^2 + \frac{fT}{2} (x + x_i) - \frac{f^2 T^3}{24m} + \hbar k x_i \right\} \right] \quad (1.7)$$

となる。

以下, 停留位相近似を適用し, 波動の中心点と見なすことができる停留点の運動をみていく。まず, 位相部分に着目し,

$$f(x) = \frac{m}{2T} (x - x_i)^2 + \frac{fT}{2} (x + x_i) - \frac{f^2 T^3}{24m} + \hbar k x_i \quad (1.8)$$

と置き, $f(x)$ を x_i で微分すると,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{m}{T} (x - x_i) + \frac{fT}{2} + \hbar k \quad (1.9)$$

が得られる。いま, 初期状態の停留点が $x = x_0$ であることから改めて $x_i = x_0$ とし, 右辺を0と置く。

ここでは粒子の運動を波動として表現しているが, その中心位置である停留点は粒子の中心点と一致しなければならないので, これは当然のことをしているに過ぎない。よって

$$-\frac{m}{T} (x - x_0) + \frac{fT}{2} \hbar k = 0 \quad (1.10)$$

$$\therefore x = x_0 + \frac{\hbar k}{m} T + \frac{1}{2} \frac{f}{m} T^2 \quad (1.11)$$

この式は初速度 $\frac{\hbar k}{m}$, 加速度 $\frac{f}{m}$ の等加速度運動を示しており, 明らかに予想された結果を示している。このように停留位相近似を適用すると, 具体的に波動関数を求めることなくその運動の概略を把握することができる。

II. $V = \frac{1}{2}kx^2$ 型ポテンシャル中での粒子の運動

この章では、ポテンシャルが x の 2 次式で表されるタイプの粒子の運動を扱う。I 章と同様に粒子が受ける力を求めると、ポテンシャルエネルギー V と力 $\vec{F}$ の関係

$$\vec{F} = -\nabla V \quad (2.1)$$

より、粒子は

$$f = -kx \quad (2.2)$$

の力を受けて運動する。図2-1にポテンシャルエネルギー V の形を示し、粒子を波動として描いている。

(2.2)式からこの運動は調和振動子（単振動）であることが理解できる。巨視的なマクロの世界では、ばねにつり下げられたおもりの上下運動やブランコの微小な振動、水に浮かぶ直方体の木片の上下振動など、自然界にありふれた基本的な運動である。当然ここでは、原子や分子の熱振動などミクロな世界で

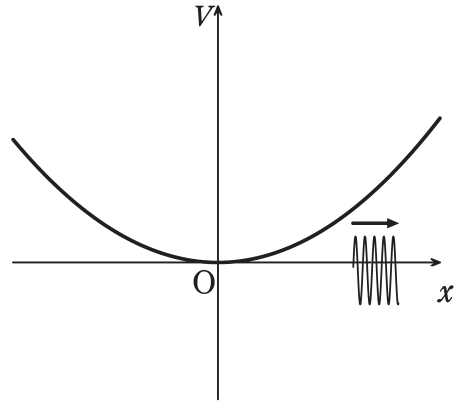


図2-1

の現象を想定する。つまり、ポテンシャルエネルギーが $V = \frac{1}{2}kx^2$ のように x の 2 次式で表される運動は調和振動子（単振動）になる。この場合も停留位相近似により、停留点の運動は簡単に把握されるので以下に確認する。

質量 m の粒子が角振動数 ω で単振動している場合を考えると、このときのラグランジアン L は、

$$L = K - V \quad (2.3)$$

$$= \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \quad (2.4)$$

である。

次に、単振動の作用積分 S と積分核 $K(x, t)$ は、「はじめに」②調和振動子（単振動）の (B-1) 式、(B-2) 式に示している。

$$S = \frac{m\omega}{2\sin\omega(t-t_0)} \{ (x^2 + x_0^2) \cos\omega(t-t_0) - 2xx_0 \} \quad (B-1)$$

$$K(x, t) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin\omega(t-t_0)}} \exp \left[\frac{im\omega}{2\hbar \sin\omega(t-t_0)} \{ (x^2 + x_i^2) \cos\omega(t-t_0) - 2xx_0 \} \right] \quad (B-2)$$

初期状態として $x = x_0$, $t = t_0$ において、平面波

$$\psi(x_0, t_0) = A \exp(ikx_0) \quad (2.5)$$

を仮定すると、任意の時刻 t における波動関数は次のようになる。

$$\psi(x, t) = \int dx_0 A \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega(t-t_0)}} \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left[\frac{m\omega}{2 \sin \omega(t-t_0)} \right] \{ (x^2 + x_0^2) \cos \omega(t-t_0) - 2xx_0 \} + \hbar k x_0 \right] \quad (2.6)$$

ここで初期条件を $t_0 \rightarrow t_i$, $x_0 \rightarrow x_i$ と置き換え, 更に $t-t_i = T$ と置くと

$$\psi(x, T) = \int dx_i A \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T}} \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left[\frac{m\omega}{2 \sin \omega T} \right] \{ (x^2 + x_i^2) \cos \omega T - 2xx_i \} + \hbar k x_i \right] \quad (2.7)$$

波動関数の特徴は位相部分に着目して

$$f(x) = \frac{m\omega}{2 \sin \omega T} \{ (x^2 + x_i^2) \cos \omega T - 2xx_i \} + \hbar k x_i \quad (2.8)$$

停留点の位置を求めるため x_i で微分する。

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{m\omega}{\sin \omega T} \{ x_i \cos \omega T - x \} + \hbar k \quad (2.9)$$

ここで, $x_i = x_0$ を代入して右辺を 0 とおく。つまり, 停留点の位置が x_0 であることを示している。

x を求めると

$$x = x_0 \cos \omega T + \frac{\hbar k}{m\omega} \sin \omega T \quad (2.10)$$

$$= \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{\hbar k}{m\omega} \right)^2} \sin(\omega T + \alpha) \quad (2.11)$$

ここで α は

$$\tan \alpha = \frac{x_0}{\hbar k / m\omega} \quad (2.12)$$

を満たす。

x の式は明らかに古典的な単振動の式を表している。つまり, $T=0$ における初期状態が $x = x_0$ であり, 初速度が $\frac{\hbar k}{m}$ であることを示している。

続いて, 調和振動子 (単振動) のエネルギー順位について考察する。

まず始めに, シュレディンガー波動方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H \psi(x, t) \quad (2.13)$$

を満たす波動関数 $\psi(x, t)$ を考えると, 任意の状態は時間に依存しない形では

$$\psi(x) = \sum_n c_n \psi_n(x) \quad (2.14)$$

と表される。ここで, $\psi_n(x)$ は直交系で規格化されているものとする。つまり,

$$\int dx \psi_n^*(x) \psi_n(x) = 1 \quad (\psi_n^*(x) \text{ は } \psi_n(x) \text{ の共役複素数}) \quad (2.15)$$

$$\int dx \psi_n^*(x) \psi_{n'}(x) = \delta_{nn'}, \quad (\delta \text{ はクロネッカーの } \delta) \quad (2.16)$$

を満たしている。また,

$$c_n = \int dx \psi_n^*(x) \psi(x) \quad (\psi_n^*(x) \text{ は } \psi_n(x) \text{ の共役複素数}) \quad (2.17)$$

である。波動関数の時間に依存する形では

$$\psi(x, t) = \sum_n c_n \exp(-i\omega t) \psi_n(x) \quad (2.18)$$

$$= \sum_n c_n \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right) \psi_n(x) \quad (2.19)$$

と表される。

一方、波動関数 $\psi(x, t)$ をファインマン経路積分の形で表すと,

$$\psi(x, t) = \int dx_0 K(x, x_0, t) \psi(x_0) \quad (2.20)$$

$$= \sum_n c_n \int dx_0 K(x, x_0, t) \psi_n(x_0) \quad (2.22)$$

(2.19)式, (2.22)式の両辺に $\psi_n^*(x_0)$ を掛けて

$$\psi(x, t) \cdot \psi_n^*(x_0) = \sum_n c_n \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right) \psi_n(x) \cdot \psi_n^*(x_0) \quad (2.23)$$

$$\psi(x, t) \cdot \psi_n^*(x_0) = \sum_n c_n \int dx_0 K(x, x_0, t) \psi_n(x_0) \cdot \psi_n^*(x_0) \quad (2.24)$$

$$= c_n K(x, x_0, t) \quad (2.25)$$

それぞれの右辺は等しいので,

$$K(x, x_0, t) = \sum_n \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right) \psi_n(x) \cdot \psi_n^*(x_0) \quad (2.26)$$

次に $x = x_0$ として(2.26)式の両辺を積分すると, $\psi_n^*(x)$ と $\psi_n(x)$ の規格直交性から

$$\int dx K(x, x, t) = \int dx \sum_n \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right) \psi_n(x) \psi_n^*(x) \quad (2.27)$$

$$= \sum_n \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right) \quad (2.28)$$

となる。また、確率振幅 $K(x, x, T)$ は (B-2)式より

$$K(x, x, T) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T}} \exp \left[\frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega T} \{(x^2 + x^2) \cos \omega T - 2xx\} \right] \quad (2.29)$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T}} \exp \left[\frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega T} \{(2x^2) \cos \omega T - 2x^2\} \right] \quad (2.30)$$

であるので、(2.30)式を用いて積分を実行する。ここで T を含まない項を除いて積分を行うと、以下ようになる。

$$\int dx K(x, x, t) \propto \sqrt{\frac{1}{\sin \omega T}} \int dx \exp\left\{\frac{im\omega}{\hbar} \frac{x^2(\cos \omega T - 1)}{\sin \omega T}\right\} \quad (2.31)$$

$$\propto \sqrt{\frac{1}{\sin \omega T}} \sqrt{\frac{\sin \omega T}{\cos \omega T - 1}} \quad (2.32)$$

$$\propto \sqrt{\frac{1}{-2\sin^2 \frac{\omega T}{2}}} \quad (2.33)$$

$$\propto \sqrt{\frac{1}{\frac{(2i)^2}{2} \sin^2 \frac{\omega T}{2}}} \quad (2.34)$$

$$\propto \frac{1}{\exp\left(\frac{i\omega T}{2}\right) - \exp\left(\frac{-i\omega T}{2}\right)} \quad (2.35)$$

$$\propto \frac{\exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\right)}{1 - \exp(-i\omega t)} \quad (2.36)$$

$$\propto \exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\right) [1 + \exp(-i\omega t) + \{\exp(-i\omega t)\}^2 + \{\exp(-i\omega t)\}^3 + \cdots] \quad (2.37)$$

$$\propto \sum_n \exp\left\{-i\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)T\right\} \quad (2.38)$$

(2.28)式と比較すると、

$$\frac{E_n}{\hbar} = \omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (2.39)$$

$$\therefore E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n=0,1,2,3\cdots) \quad (2.40)$$

これが求める調和振動子（単振動）の波動関数のエネルギー準位である。

Ⅲ. 角型ポテンシャルによる反射と位相のずれ

この章では、図3-1のようなポテンシャルの異なる2つの領域で自由粒子がどのような挙動を示すかを調べる。

2つの領域それぞれでポテンシャルは、

$$\text{領域Ⅰ} \ (x < 0) \quad V = 0$$

$$\text{領域Ⅱ} \ (x \geq 0) \quad V = V_0$$

とし、自由粒子のもつエネルギー E が

$$\text{【A】} \quad 0 < E < V_0$$

$$\text{【B】} \quad V_0 < E$$

の2通りの場合について検討する。

また、これまでと同様に、量子論的な立場から粒子を波動関数として扱う。

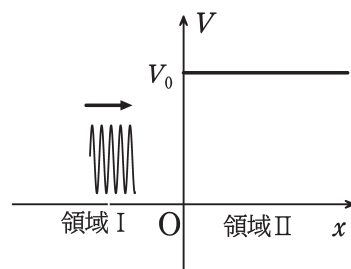


図3-1

【A】 $0 < E < V_0$ の場合

始めに、通常の波動関数ではどのような挙動を示すかを見てみよう。

この場合は、領域Ⅰにおいては、 x 正方向に進行する入射波

$$\phi_I = A \exp(ik_1 x) \quad (3.1)$$

と、ポテンシャル V_0 による反射波

$$\phi_R = B \exp(-ik_1 x) \quad (3.2)$$

が存在し、領域Ⅱにおいては、指数関数的に減衰する透過波

$$\phi_T = C \exp(-k_2 x) \quad (3.3)$$

が存在している。ここで k_1 , k_2 は、

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (3.4)$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \quad (3.5)$$

である。よってそれぞれの領域での波動関数は次で表される。

$$\text{領域Ⅰ} \quad \phi_1 = A \exp(ik_1 x) + B \exp(-ik_1 x) \quad (3.6)$$

$$\text{領域Ⅱ} \quad \phi_2 = C \exp(-k_2 x) \quad (3.7)$$

ここで、境界条件を求めると、領域Ⅰと領域Ⅱで波動関数はなめらかに接続するので、

$$\phi_1(0) = \phi_2(0) \quad (3.8)$$

$$\frac{d\phi_1(0)}{dx} = \frac{d\phi_2(0)}{dx} \quad (3.9)$$

が成り立つ。よってそれぞれの条件より

$$A + B = C \quad (3.10)$$

$$ik_1(A - B) = -k_2C \quad (3.11)$$

が得られ

$$B = \frac{k_1 - ik_2}{k_1 + ik_2} A \quad (3.12)$$

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + ik_2} A \quad (3.13)$$

となる。ここで反射率 R を計算すると、

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 \quad (3.14)$$

$$= \left| \frac{k_1 - ik_2}{k_1 + ik_2} \right|^2 \quad (3.15)$$

$$= 1 \quad (3.16)$$

となり、粒子が自身のもつエネルギーより大きいポテンシャルの壁に衝突すると反射率 $R=1$ で完全に反射される。このことは、波動関数による考察も古典力学における粒子の場合の結果と一致する。

次に、反射時における位相の変化について検討する。

$$\frac{k_1 - ik_2}{k_1 + ik_2} = z_R \quad (3.17)$$

と、置くと

$$|z_R|^2 = 1 \quad (3.18)$$

であるので、

$$z_R = \exp(i\delta) \quad (0 \leq \delta < 2\pi) \quad (3.19)$$

と表すことができる。ここで δ は位相のずれを示している。反射波は δ を用いると

$$\phi_R = B \exp(-ik_1x) = A \exp(-ik_1x) \exp(i\delta) \quad (3.20)$$

となり、入射波 ϕ_I が $x=0$ において反射される際に、位相のずれが生じることを示している。

反射波は

$$\phi_R = A \exp(-ik_1x) \exp(i\delta) \quad (3.21)$$

$$= A \exp \left\{ -ik_1 \left(x - \frac{\delta}{k_1} \right) \right\} \quad (3.22)$$

と表されるので、反射の際に x 正方向に $\frac{\delta}{k_1}$ だけ移動していることがわかる。

この位相のずれによる時間のずれを Δt_δ とすると、入射波が反射されるとき、位相の変化に対応する時間 Δt_δ だけ遅れて反射されることが理解される。

次は、ファインマン経路積分の立場から位相の変化について改めて見ていく。そこで「続編」で用いた、停留位相近似を適用してこの点について確認してみよう。

始めに、初期状態として $x = x_0$, $t = t_0$ において、次の平面波を仮定する。

$$\phi_I(x_0, t_0) = A \exp(ik_1 x_0) \quad (3.23)$$

次に、「はじめに」に引用している結果から、 x 正方向に進む自由粒子の作用積分 S と積分核 K は、

$$S = \frac{m}{2} \frac{(x - x_0)^2}{t - t_0} \quad (A-1)$$

$$K = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_0)}} \exp\left[\frac{im(x - x_0)^2}{2\hbar(t - t_0)}\right] \quad (A-2)$$

よって、 x 負方向に進む自由粒子の積分核 K^- は

$$K^- = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_0)}} \exp\left[\frac{im(-x - x_0)^2}{2\hbar(t - t_0)}\right] \quad (3.24)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_0)}} \exp\left[\frac{im(x + x_0)^2}{2\hbar(t - t_0)}\right] \quad (3.25)$$

となる。また、ファインマン経路積分による反射波 ψ_R は、位相のずれ $\exp(i\delta)$ を考慮して

$$\psi_R(x, t) = \int dx_0 A \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_0)}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m(x + x_0)^2}{2(t - t_0)} + \hbar k_1 x_0 + \hbar \delta \right\}\right] \quad (3.26)$$

で表される。ここで初期条件を $t_0 \rightarrow t_i$, $x_0 \rightarrow x_i$ と置き換え、更に $t - t_i = T$ と置くと

$$\psi_R(x, T) = \int dx_i A \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar T}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m(x + x_i)^2}{2T} + \hbar k_1 x_i + \hbar \delta \right\}\right] \quad (3.27)$$

となる。

以下、停留位相近似を用いて停留点の運動を見ていく。停留点はその波動関数の中心的な点とみなすことができる点である。 $\psi_R(x, T)$ の位相部分に着目し、

$$f(x) = \frac{m(x + x_i)^2}{2T} + \hbar k_1 x_i + \hbar \delta \quad (3.28)$$

と置き、停留点の位置を求めるため x_i で微分して 0 とする。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{m(x + x_i)}{T} + \hbar k_1 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

再び $x_i \rightarrow x_0$ と置くと、

$$x = -\frac{\hbar k_1}{m} T - x_0 \quad (3.30)$$

が得られる。 $\frac{\hbar k_1}{m}$ は波動の速さを表している。つまり反射波の停留点は x 負方向に $\frac{\hbar k_1}{m}$ の速さで進んでいることがわかる。

また、反射の際に反射波は x 正方向に $\frac{\delta}{k_1}$ だけ移動しているので、時間のずれ Δt_δ だけ遅れて反射が生じることも理解される。

以上、粒子が自身のもつエネルギーより大きなポテンシャルにより反射されるときは、反射率 $R=1$ で完全に反射される場合でも位相のずれが生じ、時間の遅れが生じることが示される。

【B】 $V_0 < E$ の場合

この場合は、領域Ⅰにおいては、(A)の場合と同様であり、 x 正方向に進行する入射波

$$\phi_I = A \exp(ik_1 x) \quad (3.31)$$

と、ポテンシャル V_0 による反射波

$$\phi_R = B \exp(-ik_1 x) \quad (3.32)$$

が存在する。しかし、領域Ⅱにおいては、(A)の場合と異なり、時間とともに減衰しない進行波

$$\phi_T = D \exp(ik_2 x) \quad (3.33)$$

が存在する。ここで k_1 , k_2 は、

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (3.34)$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \quad (3.35)$$

である。よってそれぞれの領域での波動関数は次で表される。

$$\text{領域Ⅰ} \quad \phi_1 = A \exp(ik_1 x) + B \exp(-ik_1 x) \quad (3.36)$$

$$\text{領域Ⅱ} \quad \phi_2 = D \exp(ik_2 x) \quad (3.37)$$

ここで、(A)の場合と同様、境界条件

$$\phi_1(0) = \phi_2(0) \quad (3.38)$$

$$\frac{d\phi_1(0)}{dx} = \frac{d\phi_2(0)}{dx} \quad (3.39)$$

から、

$$A + B = D \quad (3.40)$$

$$ik_1(A - B) = ik_2 D \quad (3.41)$$

が得られる。よって

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A \quad (3.42)$$

$$D = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A \quad (3.43)$$

ここで,

$$|B|^2 + |D|^2 = |A|^2 \quad (3.44)$$

が成り立ち, エネルギー保存則を示している。また, この場合は反射波, 進行波ともに位相の変化はない。

次に, (A) と同様に, ファインマン経路積分の立場から, 停留位相近似を用いて停留点の運動を見ていく。

始めに, 初期状態として $x = x_0$, $t = t_0$ において, 次の平面波を仮定する。

$$\phi_I(x_0, t_0) = A \exp(ik_1 x_0) \quad (3.45)$$

また, x 負方向に進む自由粒子の積分核 K^- は

$$K^- = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_0)}} \exp\left[\frac{im(x + x_0)^2}{2\hbar(t - t_0)}\right] \quad (3.46)$$

で表される。反射の際, 位相の変化はないので, ファインマン経路積分による反射波 ψ_R は,

$$\psi_R(x, t) = \int dx_0 A \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_0)}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m(x + x_0)^2}{2(t - t_0)} + \hbar k_1 x_0 \right\}\right] \quad (3.47)$$

となる。ここで初期条件を $t_0 \rightarrow t_i$, $x_0 \rightarrow x_i$ と置き換え, 更に $t - t_i = T$ と置くと

$$\psi_R(x, T) = \int dx_i A \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar T}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m(x + x_i)^2}{2T} + \hbar k_1 x_i \right\}\right] \quad (3.48)$$

となる。

以下, 停留位相近似を用いて停留点の運動を見ていくと, $\psi_R(x, T)$ の位相部分は

$$f(x) = \frac{m(x + x_i)^2}{2T} + \hbar k_1 x_i \quad (3.49)$$

であり, 停留点の位置を求めるため x_i で微分して 0 とする。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{m(x + x_i)}{T} + \hbar k_1 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

再び $x_i \rightarrow x_0$ と置き,

$$x = -\frac{\hbar k_1}{m} T - x_0 \quad (3.51)$$

が得られる。 $\frac{\hbar k_1}{m}$ は波動の速さを表しており, 反射波の初期位置は $x_0 = 0$ であるので, 反射波の停

留点は原点 $x = 0$ から x 負方向に $\frac{\hbar k_1}{m}$ の速さで進んでいることを示している。つまり, 入射波は $x = 0$ で反射され, 入射波と反射波が同じ速さで進むという当然の結果が確認できる。

続いて、領域Ⅱのファインマン経路積分による進行波 ψ_2 についてみる。領域Ⅱでは波数が変化して k_2 になるので、初期状態として $x = x_0$, $t = t_0$ において、次の平面波を仮定する。

$$\phi_2(x_0, t_0) = D \exp(i k_2 x_0) \quad (3.52)$$

この場合も境界において波の位相のずれがないので

$$\psi_2(x, t) = \int dx_0 A \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_0)}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m(x - x_0)^2}{2(t - t_0)} + \hbar k_2 x_0 \right\}\right] \quad (3.53)$$

で表される。ここで初期条件を $t_0 \rightarrow t_i$, $x_0 \rightarrow x_i$ と置き換え、更に $t - t_i = T$ と置くと

$$\psi_2(x, T) = \int dx_i A \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar T}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m(x - x_i)^2}{2T} + \hbar k_2 x_i \right\}\right] \quad (3.54)$$

となる。

以下、同様に停留位相近似を用いて停留点の運動を見ていく。 $\psi_T(x, T)$ の位相部分に着目し、

$$f(x) = \frac{m(x - x_i)^2}{2T} + \hbar k_2 x_i \quad (3.55)$$

と置き、停留点の位置を求めるため x_i で微分して 0 とする。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= -\frac{m(x - x_i)}{T} + \hbar k_2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

再び $x_i \rightarrow x_0$ と置くと、

$$x = \frac{\hbar k_2}{m} T + x_0 \quad (3.57)$$

が得られる。 $\frac{\hbar k_2}{m}$ は波動の速さを表している。ここで初期位置は $x_0 = 0$ であるので、進行波は $x = 0$

原点から x 正方向に $\frac{\hbar k_2}{m}$ の速さで進んでいるということがわかる。つまり、領域Ⅰでは $\frac{\hbar k_1}{m}$ の速

さで進んできた入射波が、領域Ⅱに入り速さ $\frac{\hbar k_2}{m}$ の進行波になり x 正方向に進むという、これも

また当然の結果を示している。

IV. 井戸型ポテンシャル間での粒子の運動

それぞれの領域でのポテンシャルは、

$$\text{領域 I } (x < 0) \quad V = \infty$$

$$\text{領域 II } (0 \leq x \leq L) \quad V = 0$$

$$\text{領域 III } (L < x) \quad V = \infty$$

とする。つまり、自由粒子のもつエネルギーを E とすると、無限の高さの壁で遮られた領域での粒子の運動を考えることになる。古典力学の場合では、当然粒子は領域 II において反射を繰り返しながら往復運動をする。ここでも前章と同様、粒子を波動関数で表し、その挙動を見ていく。また簡単のために粒子を平面波として考える。

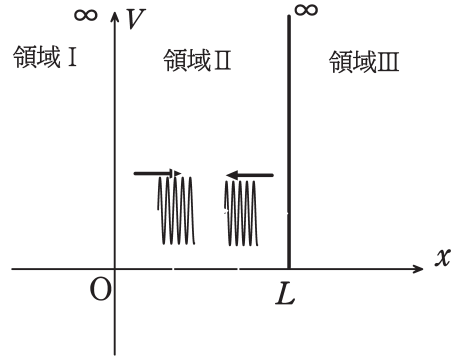


図4-1

始めに、初期状態として

$x = x_0$, $t = t_0$ において、次の平面波を仮定する。

$$\phi(x_0, t_0) = A \exp(ikx_0) \quad (4.1)$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

また、 x 正方向に進む自由粒子の作用積分 S と確率振幅 $K(x, t)$ は、「はじめに」(A-1)式、(A-2)式に示しているように

$$S = \frac{m}{2} \frac{(x - x_0)^2}{t - t_0} \quad (A-1)$$

$$K(x, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_0)}} \exp \left[\frac{im(x - x_0)^2}{2\hbar(t - t_0)} \right] \quad (A-2)$$

であるので、この粒子の運動をファインマン経路積分により表すと、 x 正方向に進む進行波 ψ は、

$$\psi(x, t) = \int dx_0 A \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_0)}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m(x - x_0)^2}{2(t - t_0)} + \hbar k x_0 \right\} \right] \quad (4.2)$$

と表される。ここで初期条件を $t_0 \rightarrow t_i$, $x_0 \rightarrow x_i$ と置き換え、更に $t - t_i = T$ と置くと

$$\psi(x, T) = \int dx_i A \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar T}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m(x - x_i)^2}{2T} + \hbar k x_i \right\} \right] \quad (4.3)$$

となる。停留位相近似を用いて停留点の運動を見ていく。 $\psi(x, T)$ の位相部分に着目し、

$$f(x) = \frac{m(x - x_i)^2}{2T} + \hbar k x_i \quad (4.4)$$

と置き、 x_i で微分して 0 とする。

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i} &= -\frac{m(x-x_i)}{T} + \hbar k \\ &= 0\end{aligned}\tag{4.5}$$

再び $x_i \rightarrow x_0$ と置くと,

$$x = \frac{\hbar k}{m}T + x_0\tag{4.6}$$

が得られ, 停留点は等速度運動していることがわかる。ここで $x_0=0$ とすると, 粒子 (の波動関数) は $T=0$ に原点 $x=0$ から x 正方向に 速度 $\frac{\hbar k}{m}$ の等速度運動していることが示される。よって粒子が原点 $x=0$ を出て $x=L$ に達するまでの運動は

$$x = \frac{\hbar k}{m}T \quad (0 \leq T \leq \frac{mL}{\hbar k})\tag{4.7}$$

で表される。

次に $x=L$ での壁による反射波を求める。ここで前章の結果より, 粒子の波動関数はポテンシャルの壁で反射されるときは, 反射率 1 の反射をするが, 位相のずれが生じることを考慮する必要がある。この例では $V=\infty$ の壁で反射されるので, 位相のずれは $\delta=\pi$ である。

$x=L$ で反射され, x 負方向に進む自由粒子の作用積分 S と積分核 $K(x, t)$ は

$$S = \frac{m}{2} \frac{(2L-x-x_0)^2}{t-t_0}\tag{4.8}$$

$$K = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t-t_0)}} \exp\left[\frac{im(2L-x-x_0)^2}{2\hbar(t-t_0)}\right]\tag{4.9}$$

で表される。 x 負方向に進む反射波 ψ_R をファインマン経路積分により表すと, 位相のずれ $\delta=\pi$ を考慮して次式で表される。

$$\psi_R(x, t) = \int dx_0 A \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t-t_0)}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m(2L-x-x_0)^2}{2(t-t_0)} + \hbar k x_0 + k\pi \right\}\right]\tag{4.10}$$

$$= - \int dx_0 A \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t-t_0)}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m(2L-x-x_0)^2}{2(t-t_0)} + \hbar k x_0 \right\}\right]\tag{4.11}$$

ここで初期条件を $t_0 \rightarrow t_i$, $x_0 \rightarrow x_i$ と置き換え, 更に $t-t_i=T$ と置くと

$$\psi_R(x, T) = - \int dx_i A \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar T}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m(2L-x-x_i)^2}{2T} + \hbar k x_i \right\}\right]\tag{4.12}$$

となる。これまでと同様に, 停留点の運動を見ていく。位相部分に着目し,

$$f_R(x) = \frac{m(2L-x-x_i)^2}{2T} + \hbar k x_i\tag{4.13}$$

x_i で微分して 0 とすると

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_R}{\partial x_i} &= -\frac{m(2L-x-x_i)}{T} + \hbar k \\ &= 0\end{aligned}\tag{4.14}$$

再び $x_i \rightarrow x_0$ と置くと,

$$x = -\frac{\hbar k}{m}T + 2L - x_0\tag{4.15}$$

が得られ, ここで $x_0=0$ とすると, 粒子の波動関数は $T=0$ に $x=2L$ から x 負方向に 速度 $-\frac{\hbar k}{m}$ の等速度運動していることがわかる。よって粒子が $x=L$ で反射して原点 $x=0$ に戻る間での運動は

$$x = -\frac{\hbar k}{m}T + 2L \quad \left(\frac{mL}{\hbar k} \leq T \leq \frac{2mL}{\hbar k}\right)\tag{4.16}$$

で表される。そして 再び $x=0$ のポテンシャルの壁で反射されて x 正方向に移動する。以上の運動を

$$0 \leq x \leq L$$

の範囲で繰り返すことになる。

続いて, $0 \leq x \leq L$ の間で運動している粒子の波動関数のエネルギー準位を求める。

まず, x 正方向に進む進行波 ψ を,

$$\psi = A \exp[-i(\omega t - kx)]\tag{4.17}$$

と置く。このとき x 負方向に進む反射波 ψ_R は, 反射の際位相が π ずれることと, また式(4.16)で示されるように, 反射波は $2L$ だけ x 正方向に移動することを考慮して,

$$\psi_R = -A \exp[-i(\omega t - k(x-2L))]\tag{4.18}$$

で表される。

よって合成波 Ψ は

$$\Psi = \psi + \psi_R\tag{4.19}$$

$$= A \exp[-i\omega t] [\exp(ikx) - \exp(-ik(x-2L))]\tag{4.20}$$

$$= A \exp[-i\omega t] \varphi(x)\tag{4.21}$$

となる。ここで $\varphi(x)$ は x のみの関数である。

境界条件は,

$$\begin{aligned}x=0 &; \Psi=0 \\ x=L &; \Psi=0\end{aligned}\tag{4.22}$$

である。

$$\therefore k = k_n = \frac{n\pi}{L}\tag{4.23}$$

このとき,

$$\varphi(x) = \{\exp(ik_n x) - \exp(-ik_n x)\} \cdot \exp(i2n\pi)\tag{4.24}$$

$$= 2i \sin k_n x \quad (4.25)$$

で表される。

また、波動関数のもつエネルギーは $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ で与えられるので

求めるエネルギー準位は、

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.26)$$

となる。

図4-2は $\sin k_n x$ の波形とエネルギー準位 E_n を $n = 1, 2, 3$ の場合についてそれぞれ示している。

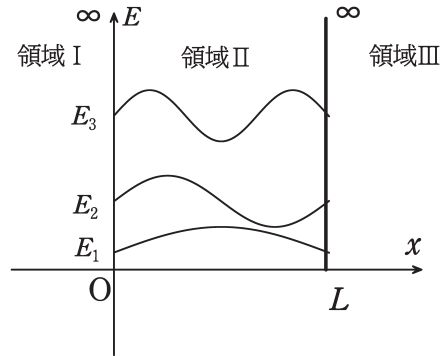


図4-2

V. ベクトルポテンシャル

本章以降は電磁場中でのポテンシャルを考える。高校物理の「電気と磁気」の分野で学習するように、静電場中の電荷 q のもつ位置エネルギー(ポテンシャルエネルギー)はスカラーポテンシャル(電位) ϕ を用いて $q\phi$ で表される。そしてこの $q\phi$ を用いて電荷の運動を考察することができる。それでは、静磁場中を運動している電荷にはこのスカラーポテンシャルに対応するものはないのか。実は磁場中ではベクトルポテンシャルを用いてその位置エネルギーに相当する量を求めることができる。つまり磁場中での荷電粒子の運動は、ベクトルポテンシャルによるポテンシャルエネルギーを用いて扱うことができる。静電場中での荷電粒子の運動はスカラーポテンシャルつまりスカラー量で考えればことは足りる。それに対して、ベクトルポテンシャルはベクトル量であるのでその扱いはスカラーポテンシャルほど単純ではない。そこで、本章ではこのベクトルポテンシャルについて考察する。

まず始めに、ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ は、磁束密度を $\vec{B}$ として、

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B} \quad (5.1)$$

により定義される。

ここで、一様な磁束密度 $\vec{B}$ を与えるベクトルポテンシャルの一例を示すと

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} \quad (5.2)$$

が考えられる。つまり、

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z), \quad (5.3)$$

$$\vec{r} = (x, y, z) \quad (5.4)$$

とすると

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \quad (5.5)$$

$$= \frac{1}{2} (B_x, B_y, B_z) \times (x, y, z) \quad (5.6)$$

$$= \left(\frac{1}{2} (B_y z - B_z y), \frac{1}{2} (B_z x - B_x z), \frac{1}{2} (B_x y - B_y x) \right) \quad (5.7)$$

で表され、 $\nabla \times \vec{A}$ を求めると

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (5.8)$$

$$= \left(\frac{1}{2} B_x + \frac{1}{2} B_x, \frac{1}{2} B_y + \frac{1}{2} B_y, \frac{1}{2} B_z + \frac{1}{2} B_z \right) \quad (5.9)$$

$$= (B_x, B_y, B_z) \quad (5.10)$$

$$= \vec{B} \quad (5.11)$$

となる。つまりベクトルポテンシャルの定義そのものになることが示される。よって、

$$\frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$$

は、一様な磁束密度 $\vec{B}$ のベクトルポテンシャルを表していることがわかる。

次に、ベクトルポテンシャルと電流密度との関係を見てみる。

μ を透磁率, $\vec{J}$ を電流密度とすると, アンペールの法則

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} \quad (5.12)$$

より,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (5.13)$$

を代入して

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \vec{J} \quad (5.14)$$

ここで, 左辺は, 直交座標において

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (5.15)$$

が成り立ち, また, 電流の分布は有限の領域に限られているので,

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (5.16)$$

となるので, 結局

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (5.17)$$

が成立する。この結果から, ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ と電流密度 $\vec{J}$ は平行であることがわかる。

つまり,

$$\vec{A} \parallel \vec{J} \quad (5.18)$$

である。各成分毎についても

$$\nabla^2 A_i = -\mu J_i \quad (i = x, y, z) \quad (5.19)$$

の関係が成り立つ。

また, 一様な磁束密度 $\vec{B}$ に中を, 速度 $\vec{v}$ で運動している電荷 q の粒子が持っている位置エネルギーに相当する物理量は, ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ を用いて

$$-q\vec{v} \cdot \vec{A} \quad (5.20)$$

で与えられる。

ここで, 一定の外部磁場を z 方向に B とする。つまり

$$\vec{B} = (0, 0, B) \quad (5.21)$$

とすると, ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ は, 前述の

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} \quad (5.22)$$

を用いると

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \quad (5.23)$$

$$= \left(\frac{1}{2}(B_y z - B_z y), \frac{1}{2}(B_z x - B_x z), \frac{1}{2}(B_x y - B_y x) \right) \quad (5.24)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}B_y, \frac{1}{2}B_x, 0 \right) \quad (5.25)$$

となる。

ところで、外部磁場が z 成分のみ存在していることから、右ネジの法則より電流は x, y 成分のみ存在することが理解できる。一方、ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ と電流密度 $\vec{j}$ は平行であることを考慮すると、ベクトルポテンシャルは x, y 成分のみ存在することになる。 $\vec{A}$ の結果はこのことの裏付けにもなっていることがわかる。

また、

$$\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (5.26)$$

より、

$$-q\vec{v} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{2}qB(x\dot{y} - y\dot{x}) \quad (5.27)$$

が得られるので、この荷電粒子のラグランジアン L は

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + q\vec{v} \cdot \vec{A} \quad (5.28)$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{qB}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) \quad (5.29)$$

となる。次のVI章ではこの(5.29)式のラグランジアンを用いて磁場中の運動を考察する。

ところで、この例では外部磁場

$$\vec{B} = (0, 0, B) \quad (5.30)$$

に対してベクトルポテンシャル

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} = \left(-\frac{1}{2}B_y, \frac{1}{2}B_x, 0 \right) \quad (5.31)$$

を用いたが、他のベクトルポテンシャル $\vec{A}'$ も可能である。例えば

$$\vec{A}' = (By, 2Bx, 0) \quad (5.32)$$

を用いて磁場を計算すると、

$$\nabla \times \vec{A}' = \left(\frac{\partial A'_z}{\partial y} - \frac{\partial A'_y}{\partial z}, \frac{\partial A'_x}{\partial z} - \frac{\partial A'_z}{\partial x}, \frac{\partial A'_y}{\partial x} - \frac{\partial A'_x}{\partial y} \right) \quad (5.33)$$

$$= (0, 0, B) \quad (5.34)$$

$$= \vec{B} \quad (5.35)$$

となり、このベクトルポテンシャル $\vec{A}'$ も同じ外部磁場 $\vec{B}$ を与える。ここで

$$\vec{A} - \vec{A'} = \left(-\frac{3y}{2}, -\frac{3x}{2}, 0 \right) \quad (5.36)$$

$$= \nabla \left(-\frac{3}{2} Bxy \right) \quad (5.37)$$

であり、 $\vec{A}$ と $\vec{A'}$ の差はスカラー関数であるので、これはベクトルポテンシャルの違いによるゲージ変換の例を示している。つまり ϕ をスカラー関数とすると、

$$\vec{A'} = \vec{A} + \nabla \phi \quad (5.38)$$

の場合も、 $\vec{A}$ と同じ磁場を与え得ることを示している。

このように、荷電粒子のラグランジアン L は、 $\vec{A}$ を用いて求めたが、 $\vec{A'}$ を用いても求めることができる。ただし、 $\vec{A}$ から求めた波動関数に対して、 $\nabla \left(-\frac{3}{2} Bxy \right)$

に由来する位相の項

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left(-\frac{3qBxy}{2} \right) \right\} \quad (5.39)$$

が、加わることになる。

このように同じ磁場を表すベクトルポテンシャルは任意に存在するが、それに対応して波動関数も変わることになる。

VI. ベクトルポテンシャル中の荷電粒子の運動

前章に続いて、磁気力を受けて運動する荷電粒子を考える。ここで荷電粒子の質量 m ，電荷 q とする。また外部磁場を $\vec{B} = (0, 0, B)$ とする。荷電粒子は原点において、速度 $\vec{v} = (v, 0, 0)$ で xy 平面内に入射する。このとき、荷電粒子はローレンツ力を受けて、 xy 平面内で等速円運動する。このことは高校物理でも学習するよく知られた現象である。この運動についてファインマン経路積分を用いて考察する。

この事例のラグランジアン L は、前章結果の(5.29)式で与えられる。

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{qB}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) \quad (5.29)$$

そして、このときの作用積分 S は「はじめに」の(D-1)式に示している。

$$S = \frac{m}{2} \left[\frac{\omega}{2} \cot \frac{\omega}{2} (t - t_0) \{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \} + \omega (x_0 y - x y_0) \right] \quad (D-1)$$

$$\text{ただし, } \omega = \frac{qB}{m}$$

また、荷電粒子は xy 平面内を運動するのでその波動関数 $\psi(\mathbf{x}, t)$ は、 xy 平面内の波動関数 $\psi_{xy}(x, y, t)$ として表される。

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_{xy}(x, y, t) \quad (6.1)$$

同じく、初期状態として $x = x_0$ ， $t = t_0$ において、波動関数 $\psi(\mathbf{x}_0, t_0)$ は

$$\psi(\mathbf{x}_0, t_0) = A \exp\{i(k_x x_0 + k_y y_0)\} \quad (6.2)$$

と表すことができる。ここで、 k_x ， k_y はそれぞれ x ， y 方向の波数を表し、

$$k_x = \frac{mv_x}{\hbar}, \quad k_y = \frac{mv_y}{\hbar} \quad (6.3)$$

である。

また、積分核 $K(\mathbf{x}, t)$ は「はじめに」の(D-2)式に示している。

$$K(\mathbf{x}, t) = \left\{ \frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_0)} \right\}^{\frac{3}{2}} \frac{\left\{ \frac{\omega}{2} (t - t_0) \right\}}{\sin \frac{\omega}{2} (t - t_0)} \times \exp \left[\frac{im}{2\hbar} \left[\frac{\omega}{2} \cot \frac{\omega}{2} (t - t_0) \{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \} + \omega (x_0 y - x y_0) + \frac{(z - z_0)^2}{t - t_0} \right] \right] \quad (D-2)$$

これらを用いて, xy 平面内の波動関数 $\psi_{xy}(x, y, t)$ は次の式で表される。

$$\psi_{xy}(x, y, t) = \int dx_0 dy_0 K(x, t) \psi_{xy}(x_0, y_0, t_0) \quad (6.4)$$

$$= \int dx_0 dy_0 K_1(t, t_0) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} f(x_0, y_0)\right\} \quad (6.5)$$

ここで $f(x_0, y_0)$ は波動関数の位相部分を表す関数であり, $K_1(t, t_0)$ は $K(x, t)$ から $\exp$ の項を除いた部分である。 $f(x_0, y_0)$ は具体的には次式で与えられる。

$$f(x_0, y_0) = \frac{m}{2} \left[\frac{\omega}{2} \cot \frac{\omega}{2} (t - t_0) \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\} + \omega(x_0 y - x y_0) \right] + \hbar(k_x x_0 + k_y y_0) \quad (6.6)$$

次に, xy 平面内での運動を検証するために, xy 平面内の波動関数 $\psi_{xy}(x, y, t)$ の位相部分を表す関数 $f(x_i, y_i)$ に対して停留位相近似を適用する。 $f(x_0, y_0)$ は x_0, y_0 の2変数の関数であるので x_0, y_0 それぞれについての関係式を求める。また, 以下では $t - t_0 = T$ と置いている。ここで $x_0 \rightarrow x_i$ と置き換え, x_i について微分すると,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{m\omega}{2} \left\{ \cot \frac{\omega T}{2} \cdot (-x + x_i) + y \right\} + \hbar k_x \quad (6.7)$$

が得られる。ここで, 改めて $x_i = x_0$ と置き, 右辺を0とする。つまり初期状態の停留点の位置が $x = x_0$ であるとしている。このとき

$$\cot \frac{\omega T}{2} \cdot (-x + x_0) + y + \frac{2\hbar k_x}{m\omega} = 0 \quad (6.8)$$

となる。同じく, y_i についても次式が得られ,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{m\omega}{2} \left\{ \cot \frac{\omega T}{2} \cdot (-y + y_i) - x \right\} + \hbar k_y \quad (6.9)$$

x_i のときと同様に, 初期状態の停留点の位置が $y = y_0$ であるとして

$$\cot \frac{\omega T}{2} \cdot (-y + y_0) - x + \frac{2\hbar k_y}{m\omega} = 0 \quad (6.10)$$

が得られる。

ここで(6.8)式, (6.10)式から $\cot \frac{\omega T}{2}$ を消去すると,

$$(-x + x_0) \left(-x + \frac{2\hbar k_y}{m\omega}\right) + (y - y_0) \left(y + \frac{2\hbar k_x}{m\omega}\right) = 0 \quad (6.11)$$

が得られる。 $\omega = \frac{qB}{m}$ を代入して整理すると最終的に

$$\left\{ x - \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{2\hbar k_y}{qB} \right) \right\}^2 + \left\{ y - \frac{1}{2} \left(y_0 - \frac{2\hbar k_x}{qB} \right) \right\}^2 = \frac{1}{4} \left\{ \left(x_0 - \frac{2\hbar k_y}{qB} \right)^2 + \left(y_0 + \frac{2\hbar k_x}{qB} \right)^2 \right\} \quad (6.12)$$

の式が得られる。

(6.12)式は

$$\text{中心点} \left(\frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{2\hbar k_y}{qB} \right), \frac{1}{2} \left(y_0 - \frac{2\hbar k_x}{qB} \right) \right) \quad (6.13)$$

$$\text{半径} \frac{1}{2} \sqrt{\left(x_0 - \frac{2\hbar k_y}{qB} \right)^2 + \left(y_0 + \frac{2\hbar k_x}{qB} \right)^2} \quad (6.14)$$

の円の方程式を表している。このことから xy 平面内での運動は円運動であることが示される。

因みに、 $\cot \frac{\omega T}{2}$ が解を持つ条件、

$$\begin{vmatrix} -x+x_0 & y+\frac{2\hbar k_x}{m\omega} \\ -y+y_0 & -x+\frac{2\hbar k_y}{m\omega} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.15)$$

からも同じ(6.12)式が得られる。

VII. クーロンポテンシャル中の荷電粒子の運動

最後に、1個の電子がクーロン力を受けて等速円運動している基本的な水素原子モデルについて考察する。高校物理で学習する原子分野のまとめの範囲に相当する。ここでは簡単のために2次元の平面上で考えることにする。また、荷電粒子の質量 m ，電荷 $-e$ ，クーロンの比例定数を k_0 とする。

運動量を $\vec{p}$ とすると、このときのハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 - k_0 \frac{e^2}{r} \quad (7.1)$$

ここで系のもつエネルギーを E ，波動関数を ψ とすると、定常状態でのシュレディンガー方程式は

$$H\psi = E\psi \quad (7.2)$$

であるので、

$$(H - E)\psi = 0 \quad (7.3)$$

となる。本来の量子力学の流れでは、ここで $\vec{p}^2$ を改めて演算子として描き直し、系の定常状態でのエネルギー準位を求める、という手順になる。しかし、ここではファインマン経路積分によりこの事例を考察しているのでその方法でアプローチする。

まず、ハミルトニアンに $\frac{1}{r}$ の項があるので $r \rightarrow 0$ で ∞ に発散するという不都合が生じる。そこで、

$$\bar{H} = r(H - E) \quad (7.4)$$

$$= \frac{r}{2m} \vec{p}^2 - rE - k_0 e^2 \quad (7.5)$$

を新たなハミルトニアンとして導入する。また、

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}) \quad (7.6)$$

と置くと、

$$\vec{p}^2 = m^2 \dot{\vec{r}}^2 \quad (7.7)$$

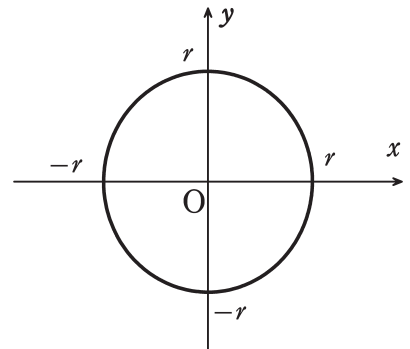


図7-1

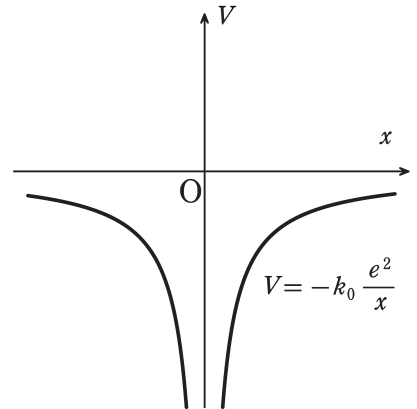


図7-2

より, $\overline{H}$ に対応するラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2r} \dot{r}^2 + rE + k_0 e^2 \quad (7.8)$$

ここで x, y を極座標で表示すると,

$$x = r \cos \theta \quad (7.9)$$

$$y = r \sin \theta \quad (7.10)$$

となる。また, 新たに変数

$$u_1 = \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (7.11)$$

$$u_2 = \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (7.12)$$

を導入する。このとき,

$$x = (\sqrt{r})^2 \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (7.13)$$

$$= u_1^2 - u_2^2 \quad (7.14)$$

$$y = 2\sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (7.15)$$

$$= 2u_1 u_2 \quad (7.16)$$

$$u_1^2 + u_2^2 = r \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (7.17)$$

$$= r \quad (7.18)$$

の関係式が得られる。ここで(7.14)式,(7.16)式を t で微分すると

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 2u_1 \frac{du_1}{dt} - 2u_2 \frac{du_2}{dt} \quad (7.19)$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = 2u_1 \frac{du_2}{dt} + 2u_2 \frac{du_1}{dt} \quad (7.20)$$

が得られ,

$$\dot{x}^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 4 \left\{ \left(u_1 \frac{du_1}{dt} \right)^2 - 2u_1 u_2 \frac{du_1}{dt} \frac{du_2}{dt} + \left(u_2 \frac{du_2}{dt} \right)^2 \right\} \quad (7.21)$$

$$\dot{y}^2 = \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 4 \left\{ \left(u_1 \frac{du_2}{dt} \right)^2 + 2u_1 u_2 \frac{du_1}{dt} \frac{du_2}{dt} + \left(u_2 \frac{du_1}{dt} \right)^2 \right\} \quad (7.22)$$

より

$$\dot{r}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad (7.23)$$

$$= 4(u_1^2 + u_2^2) \left\{ \left(\frac{du_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{du_2}{dt} \right)^2 \right\} \quad (7.24)$$

$$= 4r(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) \quad (7.25)$$

となる。

以上よりラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2r} \dot{x}^2 + rE + k_0 e^2 \quad (7.26)$$

$$= 2m(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) + E(u_1^2 + u_2^2) + k_0 e^2 \quad (7.27)$$

と変形される。ここで

$$2m = \frac{1}{2}\mu \quad (7.28)$$

$$E = -\frac{1}{2}\mu\omega^2 \quad (7.29)$$

と置くと、

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) - \frac{1}{2}\mu\omega^2(u_1^2 + u_2^2) + k_0 e^2 \quad (7.30)$$

となる。 $k_0 e^2$ は定数項であるので除いて考えると、
(7.31)

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) - \frac{1}{2}\mu\omega^2(u_1^2 + u_2^2) \quad (7.32)$$

$$= \frac{1}{2}\mu\dot{u}_1^2 - \frac{1}{2}\mu\omega^2 u_1^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{u}_2^2 - \frac{1}{2}\mu\omega^2 u_2^2 \quad (7.33)$$

で表される。ここで

$$L_1 = \frac{1}{2}\mu\dot{u}_1^2 - \frac{1}{2}\mu\omega^2 u_1^2 \quad (7.34)$$

$$L_2 = \frac{1}{2}\mu\dot{u}_2^2 - \frac{1}{2}\mu\omega^2 u_2^2 \quad (7.35)$$

はそれぞれ調和振動子（単振動）のラグランジアンを表しているの、 L は形の上では2個の調和振動子のラグランジアンの和になっている。つまり、等速円運動のラグランジアンは2個の調和振動子のラグランジアンの和で表されるということである。

便宜上、変数を

$$u_1 \rightarrow u \quad (7.36)$$

$$u_2 \rightarrow v \quad (7.37)$$

と置き換える。このとき(7.11)式、(7.12)式から

$$u = \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (7.38)$$

$$v = \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (7.39)$$

となる。また、1変数（1次元）の調和振動子の作用積分 S と積分核 $K(x, t)$ は「はじめに」

(B-I) 式、(B-II)式で示されている。

$$S = \frac{m\omega}{2\sin\omega(t-t_0)} \{ (x^2 + x_0^2) \cos\omega(t-t_0) - 2xx_0 \} \quad (\text{B-I})$$

$$K(x, t) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega(t-t_0)}} \exp \left[\frac{i m \omega}{2 \hbar \sin \omega(t-t_0)} \{ (x^2 + x_0^2) \cos \omega(t-t_0) - 2xx_0 \} \right] \quad (\text{B-II})$$

この例における等速円運動は2変数（2次元）の運動であり、ラグランジアンは2個の調和振動子のラグランジアン之和で表されるので、初期状態を $t=t_0$ において、 $u=u_0$ 、 $v=v_0$ とし、また、 $t-t_0=T$ と置くと S 、 $K(u, v, T)$ はそれぞれ

$$S = \frac{\mu\omega}{2\sin\omega T} \{ [(u^2 + u_0^2) \cos \omega T - 2uu_0] + [(v^2 + v_0^2) \cos \omega T - 2vv_0] \} \quad (7.40)$$

$$K(u, v, T) = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T}} \times \exp \left[\frac{i\mu\omega}{2\hbar \sin \omega T} \{ [(u^2 + u_0^2) \cos \omega T - 2uu_0] + [(v^2 + v_0^2) \cos \omega T - 2vv_0] \} \right] \quad (7.41)$$

で表される。また、初期状態の波動関数 $\psi(u_0, v_0, t_0)$ は

$$\psi(u_0, v_0, t_0) = A \exp[i(k_u u_0 + k_v v_0)] \quad (7.42)$$

の2次元の平面波を仮定する。ここで、 k_u 、 k_v はそれぞれ u 、 v 方向の波数を表している。

以上から、 uv 面内の波動関数 $\psi(u, v, t)$ は次の式で表される。

$$\psi(u, v, t) = \int dx_0 dy_0 K(u, v, T) \psi(u_0, v_0, t_0) \quad (7.43)$$

$$= \int dx_0 dy_0 \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \{ f(u) + g(v) \} \right] \quad (7.44)$$

ここで $f(u)$ 、 $g(v)$ は波動関数の位相部分を表す関数である。具体的には次式で与えられる。

$$f(u) = \frac{\mu\omega}{2\sin\omega T} \{ (u^2 + u_0^2) \cos \omega T - 2uu_0 \} + \hbar k_u u_0 \quad (7.45)$$

$$g(v) = \frac{\mu\omega}{2\sin\omega T} \{ (v^2 + v_0^2) \cos \omega T - 2vv_0 \} + \hbar k_v v_0 \quad (7.46)$$

次に、 u 、 v 方向のそれぞれの運動の概略を把握するために停留位相近似を適用して、停留点の運動を見る。ここで $u_0 \rightarrow u_i$ 、 $v_0 \rightarrow v_i$ と置き換え、 $f(u)$ 、 $g(v)$ をそれぞれ u_i 、 v_i について微分する。

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \frac{\mu\omega}{2\sin\omega T} (u_i \cos \omega T - 2u) + \hbar k_u \quad (7.47)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v_i} = \frac{\mu\omega}{2\sin\omega T} (v_i \cos \omega T - 2v) + \hbar k_v \quad (7.48)$$

ここで、改めて $u_i = u_0$ 、 $v_i = v_0$ と置き、右辺を0とする。つまり初期状態の停留点の位置が $u=u_0$ 、 $v=v_0$ であるとしている。このとき

$$u = u_0 \cos \omega T + \frac{\hbar k_u}{\mu\omega} \sin \omega T \quad (7.49)$$

$$v = v_0 \cos \omega T + \frac{\hbar k_v}{\mu\omega} \sin \omega T \quad (7.50)$$

の関係式が得られる。これらの式は当然のことではあるが、調和振動子（単振動）の式を表してい

る。つまり、 u 方向については、 $T=0$ における初期状態は $u=u_0$ ，初速度 $\dot{u}_0=\frac{\hbar k_u}{\mu}$ を表し， v 方向については、同じく $T=0$ における初期状態は $v=v_0$ ，初速度 $\dot{v}_0=\frac{\hbar k_v}{\mu}$ を表している。

ここでⅡ章(2.40)式で示したように，調和振動子（単振動）のエネルギー準位は

$$\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \quad (n=0,1,2,3\cdots)$$

で表される。この例では2個の調和振動子の和であるのでそれらの和は

$$E_{uv}=\hbar\omega(n+1) \quad (n=0,1,2,3\cdots) \quad (7.51)$$

と考えられる。ところで(7.26)式において、 k_0e^2 を除外して考察してきたが，ここで再び k_0e^2 を考慮に入れる。ハミルトニアンを考えると、 $-k_0e^2$ と E_{uv} の和が0のときハミルトニアンの固有値は0になり，定常状態のエネルギー準位を求めることができる。

$$\hbar\omega(n+1)=k_0e^2 \quad (7.52)$$

$$\therefore \omega = \frac{k_0e^2}{\hbar(n+1)} \quad (7.53)$$

また，(7.29)式から

$$E=-2m\omega^2 \quad (7.54)$$

$$=-\frac{2mk_0^2e^4}{\hbar^2(n+1)^2} \quad (n=0,1,2,3\cdots) \quad (7.55)$$

となる。この値が2次元のクーロンポテンシャル中で等速円運動している電子のエネルギー準位である。

あとがき

本稿は、「はじめに」で述べたように「朝日研究紀要（第36号）」、「同（第38号）」に続き、高校物理で扱う事象について、ポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）を考慮してFeynman経路積分を適用したものである。ミクロな世界で現れる基本的なポテンシャルエネルギーには、一定値 V_0 をもつタイプ以外に、電位 ϕ に比例する $V=q\phi$ のタイプ、単振動による $V=\frac{1}{2}kx^2$ のタイプ、クーロン力による $V=-k_0\frac{e^2}{r}$ のタイプなどが挙げられる。他に少し複雑にはなるが、磁場中で動く電荷のもつベクトルポテンシャルのタイプもある。ベクトルポテンシャルについては高校物理では履修しないので別に1章を設けて説明をした。以上のタイプのポテンシャル中で、ミクロな粒子を波動として捉え直し、停留位相近似を適用して運動の概要を見てきた。結果は本稿で示したように、波動としての挙動も粒子による運動と同様に把握できることが分かる。

ところで、高校物理と大学で学ぶ物理との最初のギャップを挙げると、何と言ってもベクトルによる演算の差であろう。高校物理では基本的にスカラー量の演算でことは足りる。微積分を利用したり、時にはナブラ演算子を使用することはあるが、線形的な計算で十分である。しかし、本稿でもV章・VI章で一例を示したように、高校物理から一段上の物理を学ぶときベクトル積（*rot* を含む）抜きには語れない。実は、高校物理でも電磁気分野は多くの点で本来はベクトルによる演算によって説明される。しかし、当然この点は除外して、始めから結果のみを利用している。ローレンツ力やフレミングの法則などもベクトル積抜きではまさに画餅であろう。力学分野でも面積速度や回転運動などは本質はベクトル積である。微積分の高校物理への活用は徐々に普及の兆しが見えているが、ベクトルによる演算はほとんど利用されていないのが現状である。本来ならば、高校物理においても早急に必要としている必須手段である。ベクトル解析以外にも多変数による微積分や複素関数など今後、高校現場でも物理の基本的理解に必要な基礎数学として別途指導する必要があると考える。本校でも「物理オリンピック」や「物理チャレンジ」の指導など機会を見つけて適時指導していきたいと思っている。若い彼らの吸収力と成長に期待している。

参考文献

- [1] 平松美喜雄「高校物理からFeynman経路積分へ」(『岡山朝日研究紀要』第36号, 2015.3.30)
- [2] 平松美喜雄「高校物理からFeynman経路積分へ(続)」(『岡山朝日研究紀要』第38号, 2017.3.30)
- [3] R.P.ファインマン, A.R.ヒップス著, 北原和夫訳: ファインマン経路積分と量子力学 (マグロウヒル出版, 1990)
- [4] ファインマン, レイトン, サンズ著, 砂川重信訳: ファインマン物理学V (岩波書店, 1979)
- [5] シッフ著, 井上健訳: 新板 量子力学上・下 (吉岡書店, 1970・1972)
- [6] J.J.Sakurai著, 桜井明夫訳: 現代の量子力学上・下 (吉岡書店, 1989・1992)
- [7] 中嶋貞雄著: 量子力学 I・II (岩波書店, 1983・1984)
- [8] 仲滋文著: 新版シュレディンガー方程式 (サイエンス社, 2007)
- [9] 二宮正夫, 杉野文彦, 杉山忠男著: 量子力学II (講談社, 2010)
- [10] 崎田文二, 吉川圭二: 経路積分による多自由度の量子力学 (岩波書店, 1986)
- [11] 森藤正人著: 量子波のダイナミクス (吉岡書店, 2006)
- [12] 和田純夫著: ファインマン経路積分 (講談社, 2014)
- [13] 米満澄, 高野宏治著: 経路積分ゼミナール (アグネ技術センター, 1994)
- [14] 大貫義郎, 鈴木増雄, 柏太郎著: 経路積分の方法 (岩波書店, 1992)
- [15] 中村徹著: 超準解析とファインマン経路積分 (河合出版, 1997)
- [16] D.J.Tannor著, 山下晃一ほか訳: 入門量子ダイナミクス上・下 (化学同人, 2011・2012)
- [17] 後藤憲一編者: 詳解量子力学演習 (共立出版, 1985)
- [18] ストラットン著, 桜井時夫訳: 電磁理論 (生産技術センター, 1978)
- [19] 砂川重信著: 理論電磁気学 (紀伊国屋書店, 1982)
- [20] 後藤憲一編者: 詳解電磁気学演習 (共立出版, 1986)
- [21] 寺沢徳雄著: 振動と波動 (岩波書店, 1985)
- [22] 斎藤正徳著: 地震波動論 (東京大学出版会, 2009)
- [23] E.G.ウィリアムズ著, 吉川・西條訳: フーリエ音響学 (シェパード・フェアーク東京, 2005)
- [24] A.L.フェッター, J.D.ワレッカ著, 松原・藤井訳: 多粒子系の量子論 (理論編・応用編) (マグロウヒルブック, 1987)
- [25] 犬井鉄郎著: 特殊函数 (岩波書店, 1974)
- [26] 犬井鉄郎著: 球函数・円筒函数・超幾何函数 (生産技術センター, 1976)
- [27] 藪下信著: 特殊関数とその応用 (森北出版, 1985)
- [28] 野呂雄吉著: 特殊関数とその応用 (生産技術センター, 1977)
- [29] 渡部隆一, 宮崎浩, 遠藤静男著: 複素関数 (培風館, 1975)
- [30] 犬井鉄郎, 石津武彦著: 複素函数論 (東京大学出版会, 1979)
- [31] 蓬田清著: 特殊関数・積分変換入門 (共立出版, 2007)
- [32] 寺澤寛一著: 自然科学者のための数学概論 (岩波書店, 1979)

- [33] 加藤祐輔著：多変数関数の微積分とベクトル解析（講談社，1987）
- [34] 安達忠次著：ベクトル解析（培風館，1975）
- [35] 深谷賢治著：電磁場とベクトル解析（岩波書店，2011）
- [36] E.T.Whittaker and G.N.Watson：A COURSE OF MODERN ANALYSIS
(CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1973)
- [37] G.N.Watson：A TREATISE ON THE THEORY OF BESSEL FUNCTIONS
(CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1980)
- [38] E.W.Hobson:THE THEORY OF SPHERICAL AND ELLIPSOIDAL HARMONICS
(CHELSEA PUBLISHING COMPANY,1965)
- [39] L.S.Shulman：Techniques and Application of Path Integration
(Wiley Interscience, 1981)
- [40] L.S.Shulman：INTRODUCTION TO THE PATH INTEGRAL
(Lectures presented at the Adriatico Research Conference, 1987)