

超難関大学への数学指導の道

山 川 宏 史

岡山朝日研究紀要 第43号（2022年3月）抜刷
〒703-8278 岡山市中区古京町2-2-21

超難関大学への数学指導の道

山 川 宏 史

1 はじめに

個人的なことで恐縮であるが、昨年度末で無事定年退職した。これまでお世話になった先生方や生徒諸君へのお礼の意味も込めて、永年にわたり教育現場で実践してきた超難関大学への数学指導について総括した。門外不出事項が多いが、各種講演会等で話してきた内容も含まれることはご容赦願いたい。

2 授業の予習は必須に

私の恩師で現在も大師匠と仰ぐ小林雄介先生は「数学の授業に予習は要らん、授業ですべて教える」と仰せで、永年それを強力に実践してこられた。私は生徒時にそれが実際に可能であると自己体験から実感した。ただ、教科書が手に入り次第、我慢できずに読破していた。母校で一緒に勤務し見習いながら、私も同じことを内外で公言してきた。確かに、予習ゼロで先入観なしの生徒集団に定義、定理・公式、例題を教え、即座に練習問題をさせるのは、新鮮味と効果がある。その際のポイントは、自宅での復習を徹底させることである。小テストなどには一切頼らない誇りも。

ところが、教科書をすぐに読破する生徒がクラスに何名もいる状況では、この方法では大きな無駄が発生する。教科書ゆえ、小説並とはいかぬが読破するのは容易である。そこで本校では方針を大転換した。教科書を5ページ読み(読むだけ)、練習問題を解いてくるところまでを自宅でさせる。授業では各分野の導入の背景を教えたり、定義可能(well defined)であることまで教える。

ただし、分野の導入に際しては、その分野全体に関するトピックスを扱うことが多い。例えば、高次方程式の分野であれば、方程式

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

を最初に板書し、2次方程式同様これが因数分解できれば解を求めることができると教えた後、いかに因数分解をするかは数時間後のお楽しみにしておく。すでにこの単元を読破している者は、瞬時にこれが因数分解困難とわかる。多くの生徒は因数定理を習い、例題や練習問題を演習した後で、やっとそれがわかる。この段階でクラス全員に

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

の因数分解を利用することができないかを考えさせる。1名でも突破口に気がついた者がいるクラスでは

$$a = x, bc = 1, b^3 + c^3 = 1$$

とおけば見事に適用可能であると教えて、あとは各自で考えさせる。正解者が出たクラスのみ正解を教える。突破口に気がつく者がいないクラスでは、永遠の謎に。これが公平というもの。今年度はリモートで実施されたリーダー育成事業で一昨年正月山陽ハイツに派遣の際、これを発問した。理系の男子生徒1名が突然挙手して「カルダノの方法で解いたらよいですか」と確認してきた。この生徒を褒めた後で

微分により $y=x^3-3x+1$ のグラフをかけば

$$-2 \leq x \leq 2 \quad \text{とわかるので} \quad x=2\cos\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

とおく……とヒントを授けた。sin を用いてもよい。なお、この問題は類題が 2016 年岡山大学理系に次の形で出題されていた。

関数 $f(x)=8x^3-6x-1$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (2) $a=\cos\frac{5\pi}{9}$ とするとき、 $f(a)$ の値を求めよ。
- (3) 不等式 $-\frac{1}{5} < \cos\frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}$ を証明せよ。

(2)を用いると解が求まるのがわかる。余弦の3倍角の公式を逆方向に使うのがポイント。3年生の複素数平面の私の授業では、定数項をもやや一般化して扱う。

実際に1年生3学期の授業でこれを試みると、高い志望の生徒や数学に興味・関心の深い生徒を中心によく食いついてきた。放課後の教室で生徒数名が議論する場面も散見され、確実に興味・関心を高揚できた。前述の3次方程式の定数項は、有名角のcosの値の2倍であれば何でも結構。これを昨年度数学同好会の部員に問いかけたら、数名から正解が出された。もちろん、逆三角関数を用いれば、絶対値が2以下であれば重解も含めて3個の実数解が表示できることは容易にわかる。

数学Bの教科書には、 Σ 公式が掲載されているが

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

の証明は、3乗の展開公式から得られる恒等式を基に、延々と計算がされている。そこで、「これを暗算でする方法は？」と生徒に発問してみる。十数分待つと、次のような解答を導いた生徒がいた。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_{k=1}^n \{k(k+1) - k\} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k(k+1)\{(k+1) - (k-1)\} - \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \{- (k-1)k(k+1) + k(k+1)(k+2)\} - \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n}{3}(n+1)(n+2) - \frac{n}{2}(n+1) \\ &= \frac{n}{6}(n+1)\{2(n+2) - 3\} \\ &= \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

この生徒を褒めちぎったのは言うまでもないが、残念ながら正解者が出なかったクラスでは、こちらで解答の3行目までを板書して、残りは生徒に考えさせた。次に、生徒の多くがこの解法に納得した後で

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

の証明を暗算でする方法を発問すると、同様な考え方の計算により、クラスで数名の生徒が正解した。実際にこれなら、暗算可能レベル。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n k^3 &= \sum_{k=1}^n \{(k-1)k(k+1) + k\} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (k-1)k(k+1)\{(k+2) - (k-2)\} + \sum_{k=1}^n k \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \{-(k-2)(k-1)k(k+1) + (k-1)k(k+1)(k+2)\} + \sum_{k=1}^n k \\
&= \frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3) + \frac{n}{2}(n+1) \\
&= \frac{n}{4}(n+1)(n^2+n-2+2) \\
&= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2
\end{aligned}$$

実は、このネタは優秀な生徒の指摘を受けて、最近から指導に取り入れてみた実践例である。2乗公式、3乗公式ともに正解を聞いた多くの生徒から感嘆の声が上がった。教科書にはこのような変形が掲載されていないし、塾などでもこのようなことは聞かないからである。「学校に来て良かったな」と締めくくると、生徒は歓喜した。この技は、一般項を階差型に変形することにより、非常に楽に和を求めることができるスーパー解法に一般化され、大学入試などにも形を変えて出題されるので、有効。おまけとして、次の公式証明をご堪能あれ。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n k^5 &= \sum_{k=1}^n (k^5 - 5k^3 + 4k + 5k^3 - 4k) \\
&= \sum_{k=1}^n (k-2)(k-1)k(k+1)(k+2) + \sum_{k=1}^n (5k^3 - 4k) \\
&= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n (k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)\{k+3 - (k-3)\} + \sum_{k=1}^n (5k^3 - 4k) \\
&= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n [-(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2) + (k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)] \\
&\quad + \sum_{k=1}^n (5k^3 - 4k) \\
&= \frac{1}{6}(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) + \frac{5}{4}n^2(n+1)^2 - 2n(n+1) \\
&= \frac{1}{24}n(n+1)\{4(n-2)(n+3)(n-1)(n+2) + 30n(n+1) - 48\} \\
&= \frac{1}{24}n(n+1)\{4(n^2+n-6)(n^2+n-2) + 30n(n+1) - 48\} \\
&= \frac{1}{24}n(n+1)\{4(n^2+n)^2 - 32(n^2+n) + 30n(n+1)\} \\
&= \frac{1}{24}n(n+1) \cdot 2n(n+1)\{2(n^2+n) - 1\} \\
&= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)
\end{aligned}$$

なお、 $\sum_{k=1}^n k^4$ はかように華麗にはできない。

3 詳しく説いてある教科書で数学Ⅰ履修後、毎週実戦演習を1時間確保

昨年度共通テスト数学ⅠAの平面図形では、最終設問になんと方べきの定理の逆が出題された。まさかこのグレーゾーンを初の共通テストに出題するとは！この例からもわかるように、教科書は詳しい方がよいのは常識。授業進度を早めるために薄い教科書を使用する傾向が最近は強いようであるが、これは愚の骨頂。本校にもかような傾向があるのは情けなし。また、老舗出版社よりも新興勢力がよい。詳しい教科書でも予習を課すことにより順調に授業は進むが、数学Ⅰ履修後全力で数学Ⅱを突っ走ると定着が悪い。教育課程上も違反である。そこで、週に1時間だけは本物の大学入試問題過去問を易から中程度まで演習する授業時間を確保した。この際、手頃な良き入試問題集を選定することが大きなポイント。入試問題集の中身・改訂状況にも平素から精通しておくことは言うまでもない。これは私の師匠三宅博己先生のご発案。

最初10分間程度で、問題集掲載の例題をそのままか数値を改題して小テストを実施。この間に輪番で指名した4名の生徒に易問題2問、中問題2問の解答を板書させる。小テスト終了後、生徒には近所で交換・採点させる。平常点に加味、板書者には小テスト満点を与える。

次に板書者に解答を説明させ、聴衆には疑義があれば質問させ、最後にこちらから質問をする。よい説明の場合には「では、次にいこう」となるし、そうでない場合にはこちらで説明をし直す。別解がある場合には、発問して挙手、指名して概略を述べさせ、こちらで板書して教える。挙手がない場合には、最初からこちらで説明を。なお、計算上間違いやすい箇所は省略なしで必ず計算をライブ実演してみせる。うまい計算方法があれば、これもライブ実演を。授業での計算省略は許されぬ。たまに故意に計算を間違える演技で生徒の瞬発力を試すことに。間違いに気がつかないクラスでは、こちらから指導が入るし、以後そのクラスでの授業の質を下げる可能性も。これが公平というもの。

生徒はお互いの説明に聞き入ったり、板書のミスを探したりと、完解者も退屈しない授業ができる。人に説明をすることで理解がさらに深まることが検証された。この演習時間は2年生の最後まで延々と続く。履修約半年後の演習効果は絶大なもので、教育課程上も違反はない。

4 定期考査には低学年から必ずBonus問題を出題

定期考査では平素の基本事項を多く出題するが、毎回満点以外に $+\alpha$ 配点で大学入試レベルの問題を出題し、生徒を刺激した。この継続的な刺激が最後には超難関大学への合格実績に直結することになる。また、優秀な生徒は、他で計算間違い等をして満点を取る権利ができるのも副産物。近年の問題例として

(1) 1年生2学期中間考査

Prove "there are infinitely many primes".

(2) 1年生2学期期末考査

$x > 0$ のとき、 $x^2 + \frac{1}{x}$ の最小値を求めよ。

(3) 2年生学年末考査

連立不等式 $y \leq n^2 - x^2$, $y \geq 0$ の表す領域に属する格子点の個数を求めよ。

(4) 3 年生 1 学期中間考査

Prove " $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ " by differential equation.
As you know, this is called Euler's formula.
Ask another proof!

英文での出題も。残念ながら、英文解答の生徒はいなかった。出題・模範解答はもちろん自前の拙い英文で。宅にある 40 年前に愛読した洋書が活躍することに。

(1) の証明 (Proof by Euclid)

Assume that we find n primes $p_1, p_2, \dots, p_n$. Then the integer $N = \underline{p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1}$ cannot be divided by $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Hence either N is a new prime or N has a prime factor different from $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Hence we can find a new prime. This process continues infinitely many times. (Q.E.D.)

(2) の略解

$x > 0$ より、相加平均相乗平均の大小関係 3 個版により

$$x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} \quad \leftarrow \text{この左辺の分解がポイント}$$

等号は、 $x^2 = \frac{1}{2x}$ すなわち $x = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ のときに限り成り立つ。よって、最小値は $\frac{3}{2} \sqrt[3]{2}$

@ 相加平均相乗平均 3 個版の裏技による華麗な解法。「限り」をつけると品格が増す。英語では "if and only if" に当たる。かように、随時英語の指導も。

(3) の略解

図(略)をかき、 y 軸対称長方形の格子点の個数から右上左上の対称部分の格子点の個数を引くと

$$\begin{aligned} & (2n+1)(n^2+1) - 2 \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{1}{3} (2n+1) \{3(n^2+1) - n(n+1)\} \\ &= \frac{1}{3} (2n+1)(2n^2 - n + 3) \end{aligned}$$

暗算で解答できてしまう華麗な技。残念ながら、この解答の生徒はいなかった。

(4) の証明

(Proof) Put $y = \cos x + i \sin x$, we have $y' = -\sin x + i \cos x = i y$

By solving differential equation, we obtain $y = A e^{ix}$ i.e. $A e^{ix} = \cos x + i \sin x$

("i.e." = "that is to say")

Here we set $x=0$, $A e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 \therefore A=1$ Therefore $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (Q.E.D.)

Very beautiful formula!

(Idea of another proof) Let's try tonight. All night long!

I By using Maclaurin (Taylor) expansion. (Univ. level)

II By proving " $e^{-ix}(\cos x + i \sin x) = 1$ " by differential. (H.S. level)

III Similar to II (H.S. level)

IV By using de Moivre's theorem and definition of e . (Univ. level)

①Ⅰは有名解法，ⅡとⅢは高校レベルの易しい解法，Ⅳは意表をつく高級な解法。実際に解答配布数時間後，Ⅱの解法で後ろ黒板に解答してあるクラスもあったのはさすが。

かように，これまでに学習した内容をうまく用いれば完解できる問題を用意する工夫は平素の努力から。実際に完解した生徒はほぼ各回とも存在した。完解できなくとも，配布された模範解答を読んで感銘することや泣いて悔しがすることに意義がある。実際に満点を逃した者はかなり悔しがっていた。高得点者は最終的には超難関大学に余裕で合格することも，合否結果・得点开示で検証された。

5 平素から長期的に考えさせる指導を

授業でクイズと称して，簡単に覚えられて常時考えることのできる問題をタイムリーに発問するようになっている。例えば，微分方程式の変数分離型を教えて教科書の問題を演習した後で

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

を板書して，一斉に生徒に考えさせる。多くのクラスで次のような正解を捻り出した生徒がいた。ちなみに，特性方程式の判別式が正の場合のほうが正解を発見する率が高かった。

$$y'' - 3y' = 3(y' - 3y) \quad \text{より} \quad y' - 3y = Ae^{3x}$$

$$\text{両辺に } e^{-3x} \text{ を掛けて } e^{-3x}y' - 3e^{-3x}y = A$$

$$(e^{-3x}y)' = A \quad \text{よって} \quad e^{-3x}y = Ax + B$$

$$\text{したがって} \quad y = (Ax + B)e^{3x}$$

生徒は，友人がかような凄いアイディアを出したことに感激し，お互いを認め合う仲に。なお，大学のテキストには，この解法は掲載されていない。特殊解を見つけてその線型結合にする解法で。ところが，学年で1名だけが次のようなスーパー別解を発見した。

$$\text{両辺に } e^{-3x} \text{ を掛けて } e^{-3x}y'' - 6e^{-3x}y' + 9e^{-3x}y = 0$$

$$(e^{-3x}y)'' = 0 \quad \text{よって} \quad e^{-3x}y = Ax + B$$

$$\text{したがって} \quad y = (Ax + B)e^{3x}$$

凄い発想力にこちらが参った。まさか，Leibniz' rule を用いて一発で仕留めるとは。この生徒は日本数学オリンピック本戦で銅賞受賞，京大理学部特色入試に合格した。彼の趣味は数学。今後の活躍が楽しみである。なお，このクイズ問題は，2011年東京都市大学において，次のような形で出題されていた。答えの関数の候補を問題文で与えているので，こちらは易問。かように，私も発見の毎日。

関数 $y = xe^{ax}$ が $y'' + 4y' + 4y = 0$ を満たすとき，定数 a の値を求めよ。

6 入試問題集や校外模試の問題を一般化・発展させる

せっかく本気で受験した模擬試験の問題も，完解したか否かだけでなく素材を活かして一般化などさらに深化した学習に役立てることを目指すべきである。例えば次の某社模試理系最終設問について

方程式 $z^6 = 8$ の解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ とする。複素数平面上で点1と点 α_k の距離を L_k とする ($k=1, 2, 3, \dots, 6$) とき， $\sum_{k=1}^6 L_k^2$ の値を求めよ。(某社模試問題をやや簡素化)

解答 $\alpha_k = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3} \right)$ である ($k=1, 2, 3, \dots, 6$)。

正六角形の重心を考えると $\sum_{k=1}^6 \alpha_k = 0$

$$\begin{aligned}
 \text{よって} \quad \sum_{k=1}^6 L_k^2 &= \sum_{k=1}^6 (\alpha_k - 1)^2 \\
 &= \sum_{k=1}^6 (\alpha_k - 1)(\overline{\alpha_k - 1}) \\
 &= \sum_{k=1}^6 (\alpha_k \overline{\alpha_k} - \alpha_k - \overline{\alpha_k} + 1) \\
 &= \sum_{k=1}^6 (|\alpha_k|^2 - \alpha_k - \overline{\alpha_k} + 1) \\
 &= \sum_{k=1}^6 (2 - \alpha_k - \overline{\alpha_k} + 1) = 18 \quad \cdots \cdots \text{答}
 \end{aligned}$$

この問題の次数 6 と定数項 8 を一般化すると、次のような問題に大変身を遂げる。

n を 2 以上の整数, c を複素数とし, 方程式 $z^n = c$ の解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ とする。複素数平面上で点 1 と点 α_k の距離を L_k とする ($k=1, 2, 3, \dots, n$) とし, $\sum_{k=1}^n L_k^2$ の値を求めよ。

解答 $c = |c|(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおくと $\alpha_k = |c|^{\frac{1}{n}}(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n})$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$)

ここで, $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0 \quad \cdots \cdots \text{①}$ であるから

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n L_k^2 &= \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1)^2 \\
 &= \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1)(\overline{\alpha_k - 1}) \\
 &= \sum_{k=1}^n (\alpha_k \overline{\alpha_k} - \alpha_k - \overline{\alpha_k} + 1) \\
 &= \sum_{k=1}^n (|\alpha_k|^2 - \alpha_k - \overline{\alpha_k} + 1) \\
 &= \sum_{k=1}^n (|c|^{\frac{2}{n}} - \alpha_k - \overline{\alpha_k} + 1) = n(|c|^{\frac{2}{n}} + 1) \quad \cdots \cdots \text{答}
 \end{aligned}$$

@ $n=6$, $|c|=8$ を代入すると, $6(2+1)=18$ となり, 原題の答えと一致することも確認すべし。ただし, ① については, 次を補題として証明しておく。 $n \geq 2$ が必要な理由もわかる。

補題 n は 2 以上の整数, θ は定数とする。 $\alpha_k = \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$)

のとき, $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0$ である。

証明 $\sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k = \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} \right)$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{\theta + (2k+1)\pi}{n} - \sin \frac{\theta + (2k-1)\pi}{n} \right)$$

$$-\frac{1}{2}i\sum_{k=1}^n\left(\cos\frac{\theta+(2k+1)\pi}{n}-\cos\frac{\theta+(2k-1)\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\frac{\theta+(2n+1)\pi}{n}-\sin\frac{\theta+\pi}{n})-\frac{1}{2}i(\cos\frac{\theta+(2n+1)\pi}{n}-\cos\frac{\theta+\pi}{n})=0$$

$\sin\frac{\pi}{n}\neq 0$ であるから $\sum_{k=1}^n\alpha_k=0$ 〔終〕

③ 三角関数の積和交換公式が使えるように、 $\sin\frac{\pi}{n}$ を掛けたのが技巧的。これを見破った補習科生が

1 名だけ存在した。また、最後で $n\geq 2$ が必要になる。なお

「 $n\geq 3$ のときは正 n 角形の重心、 $n=2$ のときは原点が中点の線分ゆえ容易にわかる」としてもよいかもしれない。もちろん、 $n=1$ のときには成り立たない。

実は、実際の模試では本問は選択問題であった。もう一方が数列極限の易しい問題で、明らかな難易差があった。選択問題間での難易管理は必須かと。

平素の演習で使用する入試問題もかようなことができる。例えば次の某社問題集収録入試問題について

実数 a, b, c が $a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=9$ を満たして変化する。 c のとり得る値の範囲を求めよ。
(某有名私大入試問題を数値簡素化)

解答方針としては

- ・その 1 $a+b, ab$ を c で表し、実数解条件を用いる。
 - ・その 2 $a+b=3-c$, $a^2+b^2=9-c^2$ と変形、直線と円が共有点をもつ条件を用いる。
- などが考えられる。

この問題の次元を上げて、3 年生定期考査に Bonus 問題として次の如く出題した。

実数 a, b, c, d が $a+b+c+d=3$, $a^2+b^2+c^2+d^2=9$ を満たして変化する。 d のとり得る値の範囲は である。
(小問集合に)

〔解答〕 Cauchy-Schwarz inequality により

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(ax+by+cz)^2 \leftarrow \text{空間ベクトル内積で一発}$$

$x=y=z=1$ を代入すると、条件式により $3(9-d^2)\geq(3-d)^2$

$$4d^2-6d-18\leq 0 \quad \text{よって} \quad -\frac{3}{2}\leq d\leq 3 \quad \cdots\cdots\text{〔答〕} \quad \textcircled{\text{A}} \quad \text{これも華麗な技}$$

模範解答として掲載、生徒配布した。数名の生徒が正解していた。これをさらに次元一般化し、次の如くさらなる Bonus 問題として同一の考査に出題した。作問をさせる考査は稀かと。

(B) n 文字に一般化し、問題を下に、解答を裏面に書け。 →書いたら右に○を ()

〔問題〕 n を 3 以上の自然数とする。実数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ があり、 $\sum_{k=1}^n a_k=A$, $\sum_{k=1}^n a_k^2=A^2$ を満たし

て変化するとき、 a_k のとり得る値の範囲を求めよ。

④ 何と、 A の正負さえ断る必要はない。ただし、解答には場合分けが必要に。

【解答】・ $A \geq 0$ のとき $\frac{2A}{n} - A \leq a_k \leq A$

・ $A < 0$ のとき $A \leq a_k \leq \frac{2A}{n} - A$ 詳解略♪

補習科定期考査にも出題したが、かような次元の一般化ができた生徒はいなかった。後日、数学同好会 1 年生部員に出題してみたら、数名がかような作問と解答を発見した。ただし、 A は正の定数としていた。彼らは既に補習科生のレベルをも超えている。今後の成長が楽しみである。

7 直前演習には他大学良問を改題

3 年 3 学期には 2 次対策直前講座をレベル別に分けて約 1 ヶ月間実施している。超難関大学用の演習問題には、旧帝大・有名私立大レベルの良問を改題して使うことにしている。実は十数年前までは、東大・京大の実戦模試過去問を使用していたが、あまりに当たり外れが大きく使いにくい。過去問は 10 年間分くらい解いている生徒もいるので、使えないのがその理由。実際の改題例として、2018 年の神戸大学理系過去問

座標空間において、 O を原点とし $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(1, 1, 0)$ とする。 $\triangle OAB$ を直線 OC の周りに 1 回転してできる回転体を L とする。

(1) 直線 OC 上にない点 $P(x, y, z)$ から直線 OC に下ろした垂線を PH とする。 $\overrightarrow{OH}$ と $\overrightarrow{HP}$ を x, y, z の式で表せ。

(2) 点 $P(x, y, z)$ が L の点であるための条件は $z^2 \leq 2xy$ かつ $0 \leq x + y \leq 2$ であることを示せ。

(3) $1 \leq a \leq 2$ とする。 L を平面 $x = a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) 立体 $\{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in L, 1 \leq x \leq 2\}$ の体積を求めよ。

を超難関大仕様に改題すると

座標空間において、 O を原点とし、 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(1, 1, 0)$ とする。 $\triangle OAB$ を直線 OC の周りに 1 回転してできる立体のうち、 $x \geq 1$ を満たす部分の体積を求めよ。

となる。切断面の断面積を文字で表し、定積分するというストーリーを原題ではかように小分けで出題している。超難関大学受験者なら、円錐を 1 つの母線に平行な平面で切った切り口が放物線になることは常識ゆえ、自分でうまい切断面を設定してノーヒントで解く訓練を初見の問題でさせているというわけだ。気づいて完解した生徒は歓喜していた。

5 年間分程度の旧帝大系および早慶同志社等数多の入試問題からの良問選定とその後の改題に年末年始取り組むのが季節行事である。その際、現地調達方式で問題文でいきなり定義を与える問題も多く含ませた。2020 年東大文理科共通第 4 問でこの傾向の問題が出題されたのは記憶に新しい。が、練り方が非常に甘く、まだまだ改題の余地があった。東大の作問は雑。いつでも改題して差し上げる。私の改題作品は校内ネットに。永年の涙ぐましい努力によって比較的順調な作業になったのは、恥ずかしながら近年のことである。私もまだまだ発展途上人と痛感、今宵も枕を濡らして反省を。

生徒は、確率、整数の性質、空間図形、複素数平面、微積分の分野を中心に 100 分で 4 問を初見で解く訓練を毎日積む。これを本校名物のマークマラソンに対抗して「2 次マラソン」と命名。初回時に今後の方針を説明、同レベルの者同志で着席させる。補習科生も混じるのでお互いに緊張感が増す効果も。3 年生、補習科生のどちらが他を圧倒するかで、その年の合格可能性をも占うことができる。

問題配布後の数分間で最初の着手問題を決定、その完解に全力を尽くさせる。この際、机間巡視により約 30 名の受講者の着手問題を数えて回る。最後にそれを公表、自分の判断が正しかったかを検証させるシステムに。これもアンケートの結果、大変参考になったと大好評であった。また、初期の段階ではこちらでヒントを板書、1 時間経過したら見ても良いことに。さらに、正解した生徒に指名し答えだけを板書させる。難しい計算問題では、途中で正解を確認できる。板書指名の生徒は大喜びしていた。これも競争心理を煽る点と答え確認の両面で大好評であった。ただし、時期が深まるにつれ減らす配慮も。試験本番では、かようなサービスはないからである。

毎週金曜日には金曜模試と称して、緊張した中で 110 分間競わせた。翌週月曜日授業で優秀者の得点順位、全受験者の大問毎ごとの平均点を公表し、答案返却する際に個人面談も毎回実施した。着手問題順、撤退時期も指導。約 1ヶ月間頑張った者はかなりの学力がついたことが入試結果で検証され、一昨年は東大理科 I 類に多数合格した。講座最終日に無記名アンケートを実施した。その内容は

- 1 教材の難易度は如何に
→ 約 6 割が中～やや難 他は難、極難
- 2 問題選定、アレンジの度合いは如何に
→ 初見の問題が多く、ヒントが少なく良い が多数
- 3 途中のヒント出し具合、生徒答え板書は如何に
→ ちょうど良い、刺激になる、答え合わせに適 等
- 4 講義内容は如何に
→ 業者解答より良い、スーパー別解などが鋭い 等
- 5 金曜模試は如何に
→ 緊張した雰囲気よく集中できた が大多数

と、概ね好評であった。無記名ゆえ、信憑性の高い意見が多い。中には、解説を詳しくして欲しいとの意見も散見されたが、超難関大学向け講座ゆえ不可。中～やや難と感じた生徒たちの多くは無事合格した。例外では、極難と感じた生徒 1 名が東大理科 I 類に数学 75 点で合格した。苦手分野克服と出題分野僥倖か。

また、昨年度の入試では補習科生理系東大・京大・東工大受験者 10 名中 9 名が合格し、驚異的な合格率をたたき出した。彼らは集団で毎回苦しみ抜き、つらい時間を過ごすことが多かったが、一同が結束して粘り、結果は非常に暖かく指導が正しかったことが検証された。

8 補習科では大学初年度程度の深い教養を

しばしば補習科の授業を担当させて戴いた。また、朝日で 3 回、芳泉で 1 回補習科担任をし、様々な指導体験もできた。最初の授業で、昔の栄養ドリンクの如く「数学は 24 時間いつでもできる」と宣言する。考えるテーマがあれば、計算用紙など不要。優れた解法の探索・試行錯誤と暗算程度の計算なら、別のことをしながらでも考えることができる。この能力を育成することは思考力の大幅な進歩につながると考えている。例えば、補習科定期考査で次の定積分の求値問題を出題した。

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$$

$$\begin{aligned}
\text{[解答]} \quad (\text{与式}) &= \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)} \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^2-x+1-(x^2-x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} dx \quad \leftarrow \text{分子の工夫が最重要} \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right) dx \quad \leftarrow \text{見事に部分分数分解} \\
&= \frac{1}{3} \left[\log(x+1) \right]_0^1 + \frac{1}{6} \int_0^1 \left(-\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{x^2-x+1} \right) dx \quad \leftarrow \text{後半部分を工夫} \\
&= \frac{1}{3} \log 2 + \frac{1}{6} \int_0^1 \left\{ -\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right\} dx \\
&= \frac{1}{3} \log 2 - \frac{1}{6} \left[\log(x^2-x+1) \right]_0^1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\tan^{-1} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]_0^1 \quad \leftarrow \text{逆三角関数の登場} \\
&= \frac{1}{3} \log 2 + \frac{\sqrt{3}\pi}{9} \quad \dots\dots \text{㊦} \quad \leftarrow \text{実は、数値的にも整合性が高い}
\end{aligned}$$

とにかくも華麗な部分分数分解で完解した者もいた。この生徒は東大理科 I 類に数学 115 点で大合格した。私の知る限りではこのスコアが最高。同じ検査に Bonus 問題で次の定積分も出題したが、こちらは誰もできなかった。もちろん、模範解答はかような形で配布した。

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{x^4+1} &= \int_0^1 \frac{dx}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} \right) dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right) dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} \right) dx \quad \leftarrow \text{かなり工夫} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^1 \left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} \right) dx \\
&\quad - \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^1 \left(\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right) dx \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\log \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right]_0^1 + \frac{1}{4} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \right\} dx \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1) + \tan^{-1}(\sqrt{2}x-1) \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \log(\sqrt{2}+1) + \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{8} \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \log(\sqrt{2}+1) + \frac{\sqrt{2}}{8}\pi \quad \dots\dots \text{㊦}
\end{aligned}$$

部分分数分解が技巧的なのがわかる。永年にわたる日夜の血の滲む努力である程度の計算まで暗算でできるようになったのは、つい最近。なお、2016 年横浜市立大学医学部にこの定積分は形を変えて出題されていた。さすがは横浜市、完全に高等学校教育課程を無視した出題をするとは。同校に本校教え子が 4 浪の末に合格したのは 10 年以上も昔の懐かしい出来事。

大学初年度における内容も当然扱う。逆三角関数の微積分、双曲線関数の性質や微積分への応用などである。例えば、次の積分計算が可能になる。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

解答 $x = \sinh t$ とおくと $\frac{dx}{dt} = \cosh t$, $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ …… ①

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int \frac{\cosh t \, dt}{\sqrt{\sinh^2 t + 1}} \\ &= \int \frac{\cosh t \, dt}{\sqrt{\cosh^2 t}} \\ &= \int dt \quad (\because \cosh t > 0 \text{ より}) \leftarrow \text{見事に約分} \\ &= t + C \end{aligned}$$

ここで $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ であるから $e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0$

$e^t > 0$ であるから $e^t = x + \sqrt{x^2 + 1}$ $t = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

したがって $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \log(x + \sqrt{x^2+1}) + C$ …… ㊦ $\leftarrow \log$ の中身に絶対値は不要

① が非常に有効なことがわかる。trigonometric functions と hyperbolic functions の間に見事な duality があることがその要因。この類題として、次の積分計算も可能。

$$\int \sqrt{x^2+1} \, dx$$

解答 $x = \sinh t$ とおくと $\frac{dx}{dt} = \cosh t$, $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, $\cosh 2t = 2\cosh^2 t - 1$

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int \sqrt{\sinh^2 t + 1} \cosh t \, dt \\ &= \int \cosh^2 t \, dt \quad (\because \cosh t > 0 \text{ より}) \\ &= \frac{1}{2} \int (\cosh 2t + 1) \, dt = \frac{1}{4} \sinh 2t + \frac{1}{2} t + C \end{aligned}$$

ここで $\cosh t > 0$ であるから $\cosh t = \sqrt{\sinh^2 t + 1}$
 $\sinh 2t = 2 \sinh t \cosh t = 2x \sqrt{x^2 + 1}$

したがって $\int \sqrt{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \{ x \sqrt{x^2+1} + \log(x + \sqrt{x^2+1}) \} + C$ …… ㊦ $\leftarrow \frac{1}{2}$ が共通に

もちろん、先ほどの式から部分積分でも求まる別解は存在するが、このほうが興味深い。県外での先生向けの講習会で何度かこの技をご披露したが、初見の先生が多く大変好評であった。一方的に講義するのではなく、小出し小出しで一緒に考えて戴くのがポイント。やはり自分で解けた快感こそ数学の楽しさかと。tan を用いても解答できるが解答が長く複雑になり、この置き換えが非常に有効であることがよくわかる。特に後者の問題。残念ながら、専門書にはかような解法が掲載されているものが少ない。図書費で生徒閲覧用大学書籍も易しいものを購入して戴いている。近年、高校生でも親しめる大学微積分・線型代数の書籍が増えたことは大変喜ばしい。その多くは本校図書館カウンターに展示。関係者なら貸し出しも可。本校最高の卒業生マスオの作品も。

実は昨年1月に双曲線関数の講義を数学同好会部員に実施したところ、偶然にも翌週の共通テスト数学ⅡB第1問に双曲線関数の性質が出題されたのには驚愕した。実際の問題では2倍角の公式が出題されていたが、講義では3倍角の公式まで証明させた。何でも知っておかねばならぬという大学入試センターからの恐ろしいメッセージか。

9 おわりに

品がないので本文には書かなかったが、初めての生徒と出会う授業が最も大切である。その時間にそのクラスで最もできる生徒を圧倒することが必須。力量の差を見せつけると良い。この1名を押さえおけば、他の生徒は自然とついてくるというもの。また、塾などの教材を持ってきてこちらを試すような質問をする生徒も存在するが、学校の教材ではないからとお断りするような品のないことはせずに、瞬殺で解答して「まさか君はこんなものもわからぬのか」と職員室中に響き渡るが如き大声で励ますことが多かった。かような生徒は二度と質問に来なくなるし、噂が噂を呼び尾鰭もついてこちらのカリスマ性が確立されるというもの。本校特有の斜に構える生徒も、使いようによっては大いに役立つことに。

近年、身の周りの現実事象を対象とした問題や極端に長いリード文を読ませる問題が大学入試においても流行っているようだが、前者は本来の数学の良さである一般化・抽象化に逆行するものである。後者は思考時間を削減する暴挙であることは誰の目にも明らかである。今後の我が国の青少年の数学力が高まるとも考えているのか。小学校算数問題ならいざ知らず、高等学校数学にかような流れを導入するとは言語道断。関係者には猛省を促したい。

一方、アクティブ・ラーニングが叫ばれているが、数学は指導のしかたによってはこれが可能である。生徒に本気で考えさせるための仕掛けを準備しておくことは重要なことである。さまざまな情報から対応策を練っておくことと、授業でうまく使える良い教材を平素から探しておくことである。今回ご紹介した実践例も私の中で年々変化している。様々なスーパー別解などは大部分が休日遠距離ロードや県内の山の頂や尾根などで考えたもの。私もまだまだ発展途上人。これからも進化を続けて参ります。教師たるもの、生涯求道者。収束などいたしません。これまで永年にわたりお導きくださった先生方や生徒諸君に改めてこころより御礼申し上げます。本当にありがとうございました。

参考文献

山川 宏史「秘伝の授業技を開発する」2019年3月フォーカスゴールド通信第17号 啓林館

山川 宏史「岡山県リーダー育成事業」2020年1月5日配付資料