共通テスト整数問題を深く探る

山　川　宏　史

岡山朝日研究紀要 第44号（2023年３月）抜刷
〒703-8278 岡山市中区古京町2-2-21

共通テスト整数問題を深く探る

山　川　宏　史

1 はじめに

大学入学共通テストが始まって数年経過した。このたび機会を与えられたので，数学Ⅰ･A 第 4 問整数問題について如何に受験生の現状を無視した出題であったかを探ることにした。特に 2022 年度の問題は，共通テスト 2 年目ということで難化することは予測されていたが，コロナ禍という実情も鑑みると大学入試センター (以下センターと略称) はここまで酷い出題をするのかという疑問が残る出題であった。

2 2021 年度第 1 日程について

共通テスト初年度ということで，整数問題の冒頭は次の如くおとなしく見える出題であった。

円周上に 15 個の点 P_0，P_1，……，P_{14} が反時計回りに順に並んでいる。最初，点 P_0 に石がある。さいころを投げて偶数の目が出たら石を反時計回りに 5 個先の点に移動させ，奇数の目が出たら石を時計回りに 3 個先の点に移動させる。この操作を繰り返す。例えば，石が点 P_5 にあるとき，さいころを投げて 6 の目が出たら石を点 P_{10} に移動させる。次に，5 の目が出たら点 P_{10} にある石を点 P_7 に移動させる。

(1)　さいころを 5 回投げて，偶数の目が $\boxed{\text{ア}}$ 回，奇数の目が $\boxed{\text{イ}}$ 回出れば，点 P_0 にある石を点 P_1 に移動させることができる。このとき，$x=\boxed{\text{ア}}$，$y=\boxed{\text{イ}}$ は，不定方程式 $5x-3y=1$ の整数解になっている。

(2)　不定方程式

$$5x-3y=8 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

のすべての整数解 x，y は，k を整数として

$$x=\boxed{\text{ア}}\times 8+\boxed{\text{ウ}}k,\quad y=\boxed{\text{イ}}\times 8+\boxed{\text{エ}}k$$

と表される。① の整数解 x，y の中で，$0\leqq y<\boxed{\text{エ}}$ を満たすものは

$$x=\boxed{\text{オ}},\quad y=\boxed{\text{カ}}$$

である。したがって，さいころを $\boxed{\text{キ}}$ 回投げて，偶数の目が $\boxed{\text{オ}}$ 回，奇数の目が $\boxed{\text{カ}}$ 回出れば，点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる。

@さいころを投げて石を移動させるというゲームを素材とした問題。これは現在巷で恣意的に流行させられている「身近な素材」をテーマとした出題。(1) は小学生でもできる問題で，高校生に解かせるのは，あまりに品がない。しかも，(2) ① の不定方程式には，$x=1$，$y=-1$ というほぼ自明な特殊解が存在することは瞬殺ゆえ，実は (1) の設問はありがた迷惑でしかない。さらにこの特殊解は (3) の答えに直結するので，$\boxed{\text{カ}}$ までの設問は遠回りになってしまう。もし筆者が受験生であったなら怒るところ。また，$x=\boxed{\text{オ}}$，$y=\boxed{\text{カ}}$ の設問は，適当に 1 桁の自然数を順次代入していくと，誘導とは無関係にすぐ求まる。ところが，次の設問から雰囲気が変わる。

(3) (2) において，さいころを $\boxed{\text{キ}}$ 回より少ない回数だけ投げて，点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることはできないだろうか。

(*) 石を反時計回りまたは時計回りに 15 個先の点に移動させると元の点に戻る。

(*) に注意すると，偶数の目が $\boxed{\text{ク}}$ 回，奇数の目が $\boxed{\text{ケ}}$ 回出れば，さいころを投げる回数が $\boxed{\text{コ}}$ 回で，点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる。このとき，

$\boxed{\text{コ}} < \boxed{\text{キ}}$ である。

@(*) の事実により，より少ない回数の移動を考えさせるわざとらしい問題。(*) に注目すると，偶数の目が 3 回出るか，奇数の目が 5 回出ると元の点に戻る。よって，(2) の結果において，偶数の目が出た回数だけを減らしてもよい。したがって，偶数の目が 1 回，奇数の目が 4 回出れば，さいころを投げる回数が 5 回で，点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる。これは，(2) の自明な特殊解 $x=1$，$y=-1$ の y にだけ $+5$ の補正を加えたことに他ならない。最初からすぐにわかる事実。かように (3) までは易しい愚問であるとわかったが，最後の (4) は激変する。

(4) 点 P_1，P_2，……，P_{14} のうちから点を一つ選び，点 P_0 にある石をさいころを何回か投げてその点に移動させる。そのために必要となる，さいころを投げる最小回数を考える。例えば，さいころを 1 回だけ投げて点 P_0 にある石を点 P_2 へ移動させることはできないが，さいころを 2 回投げて偶数の目と奇数の目が 1 回ずつ出れば，点 P_0 にある石を点 P_2 へ移動させることができる。したがって，点 P_2 を選んだ場合には，この最小回数は 2 回である。

点 P_1，P_2，……，P_{14} のうち，この最小回数が最も大きいのは点 $\boxed{\text{サ}}$ であり，その最小回数は $\boxed{\text{シ}}$ 回である。

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ P_{10}	① P_{11}	② P_{12}	③ P_{13}	④ P_{14}

@問題文自体が複雑な構造である。しかし，(3) までは易しい問題であったから受験生は我慢のしどころ。解答は次の如し。

(3) と同様に考えて，偶数の目が 3 回以上出る場合は，その回数を 3 回ずつ繰り返し減らして 0 回 ～ 2 回のいずれかにでき，奇数の目が 5 回以上出る場合も，その回数を 5 回ずつ繰り返し減らして，0 回～ 4 回のいずれかにできる。$0 \leqq x \leqq 2$，$0 \leqq y \leqq 4$ を満たす整数 x，y に対して，偶数の目が x 回，奇数の目が y 回出たときに石が移動する点をすべて調べると，右の表の如し。よって，最小回数が最も大きいのは点 P_{13} で，その回数は 6 回。

$x \backslash y$	0	1	2	3	4
0	P_0	P_{12}	P_9	P_6	P_3
1	P_5	P_2	P_{14}	P_{11}	P_8
2	P_{10}	P_7	P_4	P_1	P_{13}

かような分析を時間制約の極めて強い共通テストで行うのは困難。解答群の選択肢に対してのみ，これまでの誘導を用いるかどうかは別にして考察を洩れなく行い，慎重に答えるのが無難かと。これは整数問題の宿命ともいえること。個別試験なら，この過程をきちんと述べなければ大減点になることは必定。やはりこの問題は個別試験向きであったと結論づけられる。読者諸賢のご意見や如何に。

3 2021年度第2日程について

従来の追試に該当するということで，やや難しくなることが予測されていた。果たして如何に。

正の整数 m に対して

$$a^2+b^2+c^2+d^2=m,\ a\geqq b\geqq c\geqq d\geqq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす整数 a，b，c，d の組がいくつあるかを考える。

(1) $m=14$ のとき，① を満たす整数 a，b，c，d の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

$(\boxed{ア},\ \boxed{イ},\ \boxed{ウ},\ \boxed{エ})$

のただ1つである。

また，$m=28$ のとき，① を満たす整数 a，b，c，d の組の個数は $\boxed{オ}$ 個である。

(2) a が奇数のとき，整数 n を用いて $a=2n+1$ と表すことができる。このとき，$n(n+1)$ は偶数であるから，次の条件がすべての奇数 a で成り立つような正の整数 h のうち，最大のものは $h=\boxed{カ}$ である。

条件：a^2-1 は h の倍数である。

よって，a が奇数のとき，a^2 を $\boxed{カ}$ で割ったときの余りは1である。

また，a が偶数のとき，a^2 を $\boxed{カ}$ で割ったときの余りは，0または4のいずれかである。

@まさか，4元2次不定方程式を出題するとは。(1) は不等式で評価して範囲を絞るのが個別試験では定石であるが，マーク試験ゆえ次の如き解答で素速く逃げるべきであろう。

$m=14$ のとき，① は　$a^2+b^2+c^2+d^2=14,\ a\geqq b\geqq c\geqq d\geqq 0$

a^2，b^2，c^2，d^2 はすべて平方数かつ，この式を満たすから，これらの値の候補は0，1，4，9である。この中から選んで和を考えると，適するものは

$$14=3^2+2^2+1^2+0^2$$

だけである。よって，① を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は $(3,\ 2,\ 1,\ 0)$ のただ1つである。

$m=28$ のときも同様にして考察することにより，その組の個数3が求まる。

@$m=14$ の場合に不等式で $0\leqq a\leqq 3$ と範囲を絞ると，$m=28$ の場合に同じ要領で解答するのは大変。a の値に着目して順次列挙し，$(3,\ 3,\ 3,\ 1)$，$(4,\ 2,\ 2,\ 2)$，$(5,\ 1,\ 1,\ 1)$ の3個とわかる。ただ，洩れや重複の有無を検討するため，神経を使うことに。なお，共通テストの表記には「1つ」が漢数字という暗黙の約束(？)があるが，なぜか算用数字になっており，ちぐはぐに。チェック機能が働いていない。センターは広く天下に恥を晒し，お気の毒なこと。

(2) は，「$a^2-1=(a-1)(a+1)$　は連続した偶数の積であるから，一方のみ4の倍数もう一方は2の倍数，よって8の倍数である」とすれば，$a=2n+1$ などと置き換える必要はなく瞬殺。整数問題として普通の難易度。ただ，マーク試験ゆえ，a に順次奇数を代入すると瞬殺で求まってしまう。最後の3行は次のヒントゆえ，読み飛ばすわけにはいかぬ。問題はさらに次の如く進んだ。

(3) (2) により，$a^2+b^2+c^2+d^2$ が $\boxed{カ}$ の倍数ならば，整数 a，b，c，d のうち，偶数であるものの個数は $\boxed{キ}$ 個である。

@果たして一般の受験生が (3) をすんなりと短時間で解答できるであろうか。直感で $\boxed{キ}$ は4個しかないと思うかもしれぬが，論証を次の如く鮮やかにできる受験生は僅かであろう。読者諸賢のお考え，ついでにセンターのお考えや如何に。

(2) から　(奇数)^2=(8 の倍数)+1

よって，$a^2+b^2+c^2+d^2$ が 8 の倍数であるとき，a，b，c，d のうち奇数の個数が 1，2，3 個の場合には残りの偶数と加えてで 2 乗の和が 8 の倍数にはならない。4 個の場合も適さない。

したがって偶数の個数は 4 個しかあり得ない。

しかしながら，真面目な受験生は次の如き解答に陥り，無駄に体力を奪われてしまうことに。

(2) から，a が奇数のとき，a^2 を 8 で割ったときの余りは 1 である。

また，a が偶数のとき，a^2 を 8 で割ったときの余りは，0 または 4 のいずれかである。

同様のことが b，c，d でも成り立つ。

a^2，b^2，c^2，d^2 をそれぞれ 8 で割った余りを小さい順に r_1，r_2，r_3，r_4 とする。r_1，r_2，r_3，r_4 はそれぞれ 0，1，4 のいずれかであり，$0 \leqq r_1 \leqq r_2 \leqq r_3 \leqq r_4 \leqq 4$ である。

また，$a^2+b^2+c^2+d^2$ を 8 で割った余りは，$r_1+r_2+r_3+r_4$ を 8 で割った余りと等しい。

したがって，$a^2+b^2+c^2+d^2$ が 8 で割り切れるとき　$r_1+r_2+r_3+r_4=0,\ 8,\ 16$

r_1，r_2，r_3，r_4 はそれぞれ 0，1，4 のいずれかであるから，この等式を満たす r_1，r_2，r_3，r_4 の組は　$(r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4)=(0,\ 0,\ 0,\ 0),\ (0,\ 0,\ 4,\ 4),\ (4,\ 4,\ 4,\ 4)$

よって，$a^2+b^2+c^2+d^2$ が 8 で割り切れるとき，a^2，b^2，c^2，d^2 をそれぞれ 8 で割った余りはすべて，0 または 4 である。a^2 を 8 で割った余りが 0 か 4 であるから a は偶数。b，c，d も同様に偶数で，偶数は 4 個。

この後，これを用いて最後の仕上げ論証に取りかかることに。問題文は次の如し。

(4)　(3) を用いることにより，m が $\boxed{\text{カ}}$ の倍数であるとき，① を満たす整数 a，b，c，d が求めやすくなる。

例えば，$m=224$ のとき，① を満たす整数 a，b，c，d の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

$\left(\boxed{\text{クケ}},\ \boxed{\text{コ}},\ \boxed{\text{サ}},\ \boxed{\text{シ}}\right)$

のただ 1 つであることがわかる。

(5)　7 の倍数で 896 の約数である正の整数 m のうち，① を満たす整数 a，b，c，d の組の個数が $\boxed{\text{オ}}$ 個であるものの個数は $\boxed{\text{ス}}$ 個であり，そのうち最大のものは

$m=\boxed{\text{セソタ}}$ である。

@(4) は (3) のおかげで次の如く鮮やかな解答が可能に。

$m=224$ のとき　$a^2+b^2+c^2+d^2=224,\ a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0$　…… ②

224 は 8 の倍数であるから，a，b，c，d はすべて偶数である。

よって，$a=2a_1$，$b=2b_1$，$c=2c_1$，$d=2d_1$ と表される。(a_1，b_1，c_1，d_1 は整数)

これを ② に代入して　　　　← ここから，降下法に突入する！

$$4{a_1}^2+4{b_1}^2+4{c_1}^2+4{d_1}^2=224,\ 2a_1 \geqq 2b_1 \geqq 2c_1 \geqq 2d_1 \geqq 0$$

$${a_1}^2+{b_1}^2+{c_1}^2+{d_1}^2=56,\ a_1 \geqq b_1 \geqq c_1 \geqq d_1 \geqq 0 \quad \cdots\cdots ③$$

56 は 8 の倍数であるから，a_1，b_1，c_1，d_1 はすべて偶数である。

よって，$a_1=2a_2$，$b_1=2b_2$，$c_1=2c_2$，$d_1=2d_2$ と表される。(a_2，b_2，c_2，d_2 は整数)

これを ③ に代入して

$$4{a_2}^2+4{b_2}^2+4{c_2}^2+4{d_2}^2=56,\ 2a_2 \geqq 2b_2 \geqq 2c_2 \geqq 2d_2 \geqq 0$$

$$a_2{}^2+b_2{}^2+c_2{}^2+d_2{}^2=14,\ a_2 \geqq b_2 \geqq c_2 \geqq d_2 \geqq 0$$

(1) より，これを満たす整数 a_2，b_2，c_2，d_2 の組は，(3，2，1，0) のみである。

よって，$a=2a_1=4a_2$，$b=2b_1=4b_2$，$c=2c_1=4c_2$，$d=2d_1=4d_2$ から，$m=224$ のとき，

① を満たす整数の組 $(a，b，c，d)$ は，(12，8，4，0) のただ 1 つである。

@(3) のおかげで，4 で 2 回割ることにより (1) 前半に帰着するとは見事な降下法。しかし，これ以前の体力の消耗が激しく，殆どの受験生には厳しい。そもそも，降下法を習得している者が一般の受験生の中にどの程度存在するのか，作問者は考えていたのか。難易管理はどうなっているのかセンターにお訊きしたい。第 2 日程とはいえ，たかが共通テストにかように高尚な問題を出してもよいのか。よいはずがない。誠に残念な作問。なお，(5) は次の如く解答できる。

$896=2^7\cdot7$ より，896 の約数のうち 7 の倍数であるのは　7，$2\cdot7$，$2^2\cdot7$，……，$2^7\cdot7$

i）　$m=7$ のとき　　$a^2+b^2+c^2+d^2=7$，$a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0$

(1) と同様にして，これを満たす整数 a，b，c，d の組の個数は，(2，1，1，1) の 1 個である。

ii）　$m=2\cdot7=14$ のとき

(1) より，① を満たす整数 a，b，c，d の組の個数は 1 個である。

iii）　$m=2^2\cdot7=28$ のとき

(1) より，① を満たす整数 a，b，c，d の組の個数は 3 個である。

iv）　$m=2^3\cdot7$，……，$2^7\cdot7$ のとき

$2^3\cdot7$，……，$2^7\cdot7$ はすべて 8 の倍数であるから，① を満たす整数 a，b，c，d はすべて偶数である。

ここで，$a^2+b^2+c^2+d^2=2^\ell\cdot7$ を満たす整数 a，b，c，d の組の個数を N_ℓ とすると，

(4) と同様に考えて，$N_\ell=N_{\ell-2}$ $(\ell \geqq 3)$ である。

したがって，ii)，iii) から　　$N_7=N_5=N_3=N_1=1$，$N_6=N_4=N_2=3$

よって，7 の倍数で 896 の約数である正の整数 m のうち，① を満たす整数 a，b，c，d の組の個数が 3 個であるものは，$m=2^2\cdot7$，$2^4\cdot7$，$2^6\cdot7$ の 3 個である。

また，このうち最大のものは $m=2^6\cdot7=448$ である。

@iv) の分析で大差がつく。もはや一般受験生には無理。順に列挙して考えるのが現実的。よくわからぬ場合には，$\boxed{\text{セソタ}}$ が 3 桁ゆえ，$m=112$，448，896 だけ調べるのがお得 (224 はすでに不適と判明すみ)。なお，7 はほかの奇数でも代用できる。ただ，7 が 1 番面白い。4 個という個数も実は絶妙で，3 個以下なら面白くないし，5 個以上なら，奇数 4 個の場合が発生して，降下法が適用できなくなる。この問題は，マーク試験に出題するのは誠に惜しい。超難関大学個別試験に次の如く改題して出題可能と判明した。

$\boxed{\text{問題}}$ n を自然数の定数とする。不定方程式

$$x^2+y^2+z^2+w^2=7\cdot2^n \quad (x \geqq y \geqq z \geqq w \geqq 0) \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす整数 x，y，z，w の組の個数を a_n とする ($n=1$，2，3，……)。

(1)　a_1，a_2 の値をそれぞれ求めよ。

(2)　a_n を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$ 前述と同様な考察により

(1) $a_1=1$，$a_2=3$　　　　(2) $a_n=2+(-1)^n$　　(詳解略)　答

4 2022 年度第 1 日程について

共通テスト 2 年目ということで難化が予測されたが，整数問題には次の不定方程式が出題された。

$5^4x-2^4y=1$ ……① $5^5x-2^5y=1$ ……② $11^5x-2^5y=1$ ……③

実は，① の方程式は 2005 年度東大理科第 4 問 (文科と共通) の途中で利用するよう出題されていた。

東大過去問 3 以上 9999 以下の奇数 a で，a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

解答 $a^2-a=a(a-1)$ であり，a と $a-1$ は互いに素である。 ← 東大ゆえ，既知としてよいかと

また $10000=625\cdot16$

a は 3 以上の奇数であるから，a^2-a が 10000 で割り切れる条件は

$a=625k$，$a-1=16l$ (k は正の奇数，l は自然数)

とおけることである。辺々引いて

$625k-16l=1$ ……①'

$k=1$，$l=39$ は ①' の特殊解であるから ← $16\cdot40=640$ から瞬殺

$625\cdot1-16\cdot39=1$

$625(k-1)-16(l-39)=0$

625 と 16 は互いに素であるから

$k-1=16m$ (m は 0 以上の整数) とおける。

したがって $a=625(16m+1)=10000m+625$

ここで，$3\leqq a\leqq9999$ であるから $m=0$ よって $a=625$ 答

@なんと，① と ①' は同じ。当時は教科書に整数の性質がなかったので，大差がついたであろう。a と $a-1$ がそれぞれ 5^4 と 2^4 の因数を分担することに気づけるかどうか。現在出題されたら，この問題は易問か。東大過去問を演習していた受験生には，この問題はかなりお得であった。天下の東大という超有名大学の過去問との内容さえセンターはチェックしていなかった。なお，東大の過去問は「a と a^2 の下 4 桁が一致するような 4 桁の偶数 a」にしていたら，難易度はやや上昇し品格もあったろうに。誠に，残念。今年度の 2 年生土活講座で出題。答えは，瞬殺 $10000-624=9376$

共通テスト第 4 問問題

(1) $5^4=625$ を 2^4 で割ったときの余りは 1 に等しい。このことを用いると，不定方程式

$5^4x-2^4y=1$ ……①

の整数解のうち，x が正の整数で最小になるのは

$x=\boxed{\text{ア}}$，$y=\boxed{\text{イウ}}$

であることがわかる。

また，① の整数解のうち，x が 2 桁の正の整数で最小になるのは

$x=\boxed{\text{エオ}}$，$y=\boxed{\text{カキク}}$

である。

@(1) は不定方程式 ① の特殊解を求めさせるおとなしい出題に見えなくはない。しかし，1 行目のヒントがなければ，出題の始まりがなんと東大過去問解答途中の ①' 式と全く同一。天下の東大と一般庶民が多数受験する共通テストが同一とは，いかがなものか。さらに，この 1 行目のヒントはあまりにも品格に欠ける。ただ，このおかげで (1) の難易度は抑えられている。また，このヒントは (2) のための誘導であるが，その (2) は次の如く受験生には全く馴染みがない構成になっていく。

(2)　次に，625^2 を 5^5 で割ったときの余りと，2^5 で割ったときの余りについて考えてみよう。
まず

$$625^2 = 5^{\boxed{ケ}}$$

であり，また，$m = \boxed{イウ}$ とすると

$$625^2 = 2^{\boxed{ケ}}m^2 + 2^{\boxed{コ}}m + 1$$

である。これらより，625^2 を 5^5 で割ったときの余りと，2^5 で割ったときの余りがわかる。

@現場での指導経験が多少でもあれば，① からできる等式

$$5^4 = 2^4m + 1$$

の両辺を 2 乗する操作などは受験生はほとんど経験がないことはすぐにわかる。この (2) は受験生にとって，次に何が起こるか不安感を募らせる煽り運転出題かと。受験生を煽るとは，センターも品がない。さらに (3) は次の如く進んでいく。

(3)　(2) の考察は，不定方程式

$$5^5x - 2^5y = 1 \quad \cdots\cdots ②$$

の整数解を調べるために利用できる。
x，y を ② の整数解とする。5^5x は 5^5 の倍数であり，2^5 で割ったときの余りは 1 となる。よって，(2) により，$5^5x - 625^2$ は 5^5 でも 2^5 でも割り切れる。5^5 と 2^5 は互いに素なので，
$5^5x - 625^2$ は $5^5 \cdot 2^5$ の倍数である。
このことから，② の整数解のうち，x が 3 桁の正の整数で最小になるのは

$$x = \boxed{サシス},\quad y = \boxed{セソタチツ}$$

であることがわかる。

@特殊解 x，y を求めるだけの問題であるが，かような難解な誘導を時間制約の極めて強い共通テストという特殊現場で，自分自身の頭脳を駆使して理解するのはかなり困難かと。さらに，理解できても次の如き解答に辿り着くのは一般の受験生には不可能であることさえ，センターはわからぬようだ。もはや，お気の毒としか言えぬ。

$5^5x - 625^2$ が $5^5 \cdot 2^5$ の倍数であるから，l を整数として

$$5^5x - 625^2 = 5^5 \cdot 2^5 l$$

$$5^5x = 5^5 \cdot 2^5 l + 625^2 = 5^5 \cdot 2^5 l + 5^8$$

よって　　$x = 2^5 l + 5^3 = 32l + 125$

x が 3 桁の正の整数で最小になるのは，$l = 0$ のときで　　$x = 125$

このとき　$2^5 y = 5^5 \cdot 125 - 1$

$\qquad\qquad = 5^8 - 1$

$\qquad\qquad = 2^8m^2 + 2^5m$

よって　　$y = 2^3m^2 + m$

$\qquad\qquad = m(8m + 1)$

$\qquad\qquad = 39(8 \cdot 39 + 1) = 12207$

さらに (4) では ③ の特殊解を求めさせるべく，次の如く問題が突き進んでしまった。

(4)　11^4 を 2^4 で割ったときの余りは 1 に等しい。不定方程式

$$11^5x-2^5y=1$$

の整数解のうち，x が正の整数で最小になるのは

$$x=\boxed{テト},\ y=\boxed{ナニヌネノ}$$

である。

@(3) と同様に考えて特殊解 x，y を求めるだけの問題に見えるが，実はここまでさせるかという数値計算地獄。次の如き解答に辿り着くのはもはや神業に近い。

$(11^4)^2$ について　　$(11^4)^2=11^8$

また，11^4 を 2^4 で割ったときの余りが 1 に等しいから，n を整数として次の如く表される。

$$11^4=2^4n+1$$

よって　　$(11^4)^2=(2^4n+1)^2=2^8n^2+2^5n+1$

したがって，x，y を不定方程式 $11^5x-2^5y=1$ の解とすると，$11^5x-(11^4)^2$ は 11^5 でも 2^5 でも割り切れる。

11^5 と 2^5 は互いに素であるから，(3) と同様に考えて $11^5x-(11^4)^2$ は $11^5\cdot2^5$ の倍数である。

よって，j を整数として次の如く表される。

$$11^5x-(11^4)^2=11^5\cdot2^5j$$

$$11^5x=11^5\cdot2^5j+11^8$$

$$x=2^5j+11^3=32j+1331$$

1331 を 32 で割った商は 41，余りは 19 であるから，x が正の整数で最小になるのは

$j=-41$ のときで　　$x=32\cdot(-41)+1331=19$

このとき　$2^5y=11^5\cdot19-1$

よって　　$y=95624$

@最終設問の特殊解 y の値を求めるには，驚くなかれ

$$y=\frac{11^5\cdot19-1}{2^5}$$

の数値計算が必要。この計算を鮮やかに述べている業者解答を筆者は見たことがない。筆算のみで強引に計算したが如き解答を掲載した業者もある。しかし，これは得策にあらず。愚鈍な筆者の考えでは，パスカルの三角形を用いてできる

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

の展開式に，$a=10$，$b=1$ を代入して繰り上がりも考慮したうえで (計算マニアには当然の技)

$$11^5=100000+50000+10000+1000+50+1$$

$$=161051$$

$$11^5\cdot19=161051\cdot20-161051=3059969$$

と 2 倍して桁をずらして計算した後，最後の $\div32$ だけ筆算または暗算で実行すればよい。別の勤務校 3 年生文系で定期考査に Bonus 問題として出題したら，数名は正解，1 名の女子だけこの解法で大正解していた。ご褒美加点が。なお，繰り上がりを避けるなら，4 乗の展開でも可。ところが，夏の或る宵に突如次のアイディアが稲妻の如く降臨した。

$$y=\frac{160000\cdot 19}{32}+\frac{1051\cdot 19-1}{32}$$
$$=95000+624=95624$$

かように，11^5 を $160000+1051$ と分割するのが楽。この方法でさえ，筆者は暗算計算で 1 分近い時間を要した。試験会場では計算実行の勇気と時間管理が必要。しかも，この設問の配点はたったの 2 点。さらに，パスカルの三角形は数学Ⅱの範囲。他によき計算妙技があれば，センターに是非お訊ねしたい。本問は一般解でやめるべきであったことは明白。なお，筆者は過去にセンターに何回もFAXを入れたが，すべて無視された経験をもつ。センターもかような現場教員の真っ当な疑問に答える義務があると思うが，読者諸賢のお考えは如何に。平素から数値計算に数式の展開利用の習慣があれば，この窮地を切り抜けられるかもしれぬ。果たしてそのような機転のきく受験生はどの程度存在したのか。センターは恐ろしい数値計算レベルを求めているのか，または単に難易管理さえできぬかのいずれかであることが知れた。実は，このとんでもない係数の不定方程式は次の如く一般化できることが，血の滲む努力の結果或る暁に降臨した。

問題 n を自然数の定数とするとき，$(2n-1)^5x-2^5y=1$ の整数解をすべて求めよ。

解答 $(2n-1)^4=16n^4-32n^3+24n^2-8n+1$
$$=16\left\{n^4-2n^3+n^2+\frac{n(n-1)}{2}\right\}+1$$

ここで $\frac{n(n-1)}{2}$ は整数であるから，$(2n-1)^4$ を 2^4 で割った余りは 1 である。よって
$$(2n-1)^4=2^4m+1 \quad (m\text{は整数})$$
とおける。
$$(2n-1)^8=2^5(2^3m^2+m)+1$$
であるから，$(2n-1)^8$ を 2^5 で割った余りは 1 である。……①

ここで，$(2n-1)^5$ と 2^5 は互いに素であるから，$(2n-1)^5x-2^5y=1$ は整数解をもつ。　← 必要！！
$$(2n-1)^5x=2^5y+1$$
であるから，この整数解に対して，$(2n-1)^5x$ を 2^5 で割った余りは 1 である。……②

← 整数解が存在しないと，空論になる

①，② により，$(2n-1)^8-(2n-1)^5x$ は 2^5 で割り切れる。

また，$(2n-1)^8-(2n-1)^5x$ はもちろん $(2n-1)^5$ でも割り切れる。

$(2n-1)^5$ と 2^5 は互いに素であるから，$(2n-1)^8-(2n-1)^5x$ は $(2n-1)^5\cdot 2^5$ で割り切れるので
$$(2n-1)^8=(2n-1)^5x+(2n-1)^5\cdot 2^5k \quad (k\text{ は整数})$$
とおける。両辺を $(2n-1)^5\ (>0)$ で割ると
$$(2n-1)^3=x+2^5k \qquad x=(2n-1)^3-2^5k$$
もとの方程式に代入して
$$(2n-1)^5\{(2n-1)^3-2^5k\}-2^5y=1$$
$$(2n-1)^8-(2n-1)^3\cdot 2^5k-1=2^5y$$
$$2^5y=\{(2n-1)^4+1\}\{(2n-1)^2+1\}\{(2n-1)+1\}\{(2n-1)-1\}-(2n-1)^3\cdot 2^5k$$
よって
$$y=\frac{(2n-1)^4+1}{2}\cdot\frac{(2n-1)^2+1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}-(2n-1)^3k$$

$$x=(2n-1)^3-2^5k,\ \ y=\frac{(2n-1)^4+1}{2}\cdot\frac{(2n-1)^2+1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}-(2n-1)^3k\quad (k \text{ は整数})\quad 答$$

@$(2n-1)^5x-2^5y=1$ が整数解をもつ　という断り書きは必須。この議論は，あくまで「整数解をもつならば」という前提で進められていることに注意。共通テストにはその点が意図的に(？)曖昧にされていた。ただし，$(2n-1)^5$ と 2^5 は互いに素であるから整数解をもつことは，後述の有名定理により保証されている。知っている人には瞬殺。しかし，一般の受験生がこの定理を知っているか，証明経験があるか大変怪しい。実に気持ちの悪い出題。なお，y に現れる分数はすべて約分できるので，y は確かに整数となる。$k=0$ を代入すると

$$x=(2n-1)^3,\ \ y=\frac{(2n-1)^4+1}{2}\cdot\frac{(2n-1)^2+1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\qquad \text{：特殊解}$$

が導かれる。共通テスト (3) はさらに $n=3$ の場合，(4) は $n=6$，$k=41$ の場合。(4) はせめて $n=5$ であったなら，数値マニアなら　$9^5=3^{10}=59049$　は常識ゆえ，まだよかったものを。作問者は数論の専門家か。受験生の学習実態とあまりにもかけ離れた問題を一発勝負の大試験に出題してしまうのは論外。しかも，この学年はコロナ禍での休校などで学習が遅れている可能性が高かった。入試問題にはそれなりの配慮も必要であったことは明白。これらのことをセンターは真摯に反省すべきかと。

5 2022 年度第 2 日程について

第 1 日程に酷い出題があったバランス上か，第 2 日程にも次の酷い不定方程式が出題された。

$$\frac{k}{5}+\frac{\ell}{7}+\frac{m}{11}=\frac{1}{385}+n\quad (k,\ \ell,\ m,\ n \text{ は整数}\quad 0\leqq k<5,\ 0\leqq \ell<7,\ 0\leqq m<11)\quad \cdots\cdots ①$$

なんと，4 元の不定方程式を出題するとは。受験生も関係者も驚愕したことであろう。なお，活字の l が直線などに用いられる所謂「巻きエルの ℓ」になっている。教科書書体の主流は，文字定数のエルは所謂「鍵エルの l」である。違和感が強いし，作問者は高校の教科書さえ見ていない事実を吐露している。以下，鍵エルの l で表記する。実は原題には最初に唐突な (1) があった。

> (1)　整数 k が $0\leqq k<5$ を満たすとする。$77k=5\times15k+2k$ に注意すると，$77k$ を 5 で割った余りが 1 となるのは $k=\boxed{\text{ア}}$ のときである。

不定方程式 ① はこの後 (2) で登場する。そして，そのために次の如く強い誘導があった。

> ① の両辺に 385 を掛けると
>
> $$77k+55l+35m=1+385n$$
> $$77k=5(-11l-7m+77n)+1$$
>
> となることから，$77k$ を 5 で割った余りは 1 なので $k=\boxed{\text{ア}}$ である。

唐突な (1) をここで用いている。しかも $\boxed{\text{ア}}$ の答えは (1) で与えられている。しかし，この部分を読み飛ばす勇気のある受験生は皆無かと。この後，問題は次の如く続いていく。

> 同様にして
>
> $$55l=7(-11k-5m+55n)+1$$
> $$35m=11(-7k-5l+35n)+1$$
>
> であることに注意すると，$l=\boxed{\text{イ}}$ および $m=\boxed{\text{ウ}}$ が得られる。
>
> 　なお，$k=\boxed{\text{ア}}$，$l=\boxed{\text{イ}}$，$m=\boxed{\text{ウ}}$ を ① に代入すると $n=2$ であることがわかる。

@なんと，n の値は求めさせることなく見せてしまうとは。作問者は問題の落としどころさえわかっていない。結局，同じルーティンで $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ を求めるだけで，この 4 元不定方程式は終了。ここから，無関係の次の設問に進んでいく (駄作で紙面の無駄ゆえ略)。なお，この問題も次の如く一般化できることが遠距離ロード途上でわかった。

問題 a，b，c はいずれの 2 つも互いに素であるような 2 以上の自然数の定数とする。不定方程式

$$\frac{k}{a}+\frac{l}{b}+\frac{m}{c}-\frac{1}{abc}=n \quad (k,\ l,\ m,\ n \text{ は整数} \quad 0\leqq k<a,\ 0\leqq l<b,\ 0\leqq m<c) \quad \cdots\cdots ①$$

の整数解 k，l，m，n が存在するかどうか調べよ。

解答 a と bc は互いに素であるから

$$as+bck'=1 \quad \cdots\cdots ②$$

となる 整数 s，k' が存在する。k' が $0\leqq k'<a$ を満たすときはこの k' を k とする。

$k'\geqq a$ であるときには，$k'-a$ と $s+bc$ を考えると，② を満たす。同様に a ずつ下げていくと，$0\leqq k<a$ を満たすように k をただ 1 つだけとることができる。

$k'<0$ であるときには，$k'+a$ と $s-bc$ を考えると，② を満たす。同様に a ずつ上げていくと，$0\leqq k<a$ を満たすように k をただ 1 つだけとることができる。

以上により，このような k はただ 1 つだけ存在する。　$as+bck=1 \quad \cdots\cdots ③$

l，m も同様にして

$$bt+cal=1,\ cu+abm=1 \quad \cdots\cdots ④$$

を満たすものがそれぞれ 1 つだけ存在する。これらの決定した k，l，m の値を ① に代入すると，n もただ 1 つだけ求まる。この n が整数かどうかを検証する。

① の左辺を通分して ③ だけを代入すると

$$\begin{aligned}\frac{k}{a}+\frac{l}{b}+\frac{m}{c}-\frac{1}{abc}&=\frac{kbc+lca+mab-1}{abc}\\&=\frac{1-as+lca+mab-1}{abc}\\&=\frac{a(-s+lc+mb)}{abc}\end{aligned}$$

となり，この分子は a の倍数である。同様に ④ を 1 つだけ代入すると，この分子は b，c の倍数でもある。よって，① の左辺は整数となり，求めた唯一の n は確かに整数である。　答

@最後が技巧的。もし，$k=0$ と仮定すると，③ により $a=1$ となり矛盾。したがって，$0<k<a$，同様にして $0<l<b$，$0<m<c$ もわかる。また，a，b，c が素数である必要はない。いずれの 2 つも互いに素であることが，整数解が存在するための必要十分条件であるから，条件をかなり緩和できた。さらに解の一意性まで示すこともできた。ただし，証明の途中に整数論の重要な定理である

> 自然数 a，b に対して
> a，b が互いに素である。　$\Longleftrightarrow$　$sa+tb=1$ となる整数 s，t が存在する。

を用いている。私が初めてこの定理に出会ったのは，大学 2 年生の頃である。非可換環論の世界的権威の大恩師教授に教わり，証明には苦労した思い出がある。現在は高校で使用する黒い装丁の参考書にも掲載されている。その証明アイディアは，整数環のイデアルが単位元を含むという方針になっているのはさすが。現在の参考書はよい。筆者も高校生の頃に使用したかった。なお，先ほどの証明は変数の個数も制限を受けないので，最終的には次の形に一般化できた。

問題 n は 2 以上の自然数の定数，a_1，a_2，a_3，……，a_n はいずれの 2 つも互いに素であるような 2 以上の自然数の定数であるとする。不定方程式

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\frac{x_3}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{x_n}{a_n}-y=\frac{1}{a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n}\quad ただし，0\leqq x_k<a_k\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$$

の整数解 x_1，x_2，x_3，……，x_n，y が存在するかどうか調べよ。

解答 ただ 1 組だけ存在する（詳解略）。 答

6 おわりに

筆者は共通 1 次試験 1 期生である。遙か昔受験，当時は数学 I II 合体で 100 分 200 点。初年度ということで易問の連続，見直す必要もなく 30 分で完解。時間を持て余した経験がある。印象に残った問題は，円に内接する四角形の各辺の長さ 1，2，3，4 が与えられ，対角線の長さや面積を求める問題くらいか（当時としては新傾向）。翌日の自己採点では，文系も含め学友の多くが満点を獲得し喜ぶ様を複雑な気持ちで眺めていた（本来ならば大差がついたものを）。それに比べれば，現在の試験の難易度は隔世の感。ただ，真面目に学習した者には現在の試験が公平というもの。しかし，懲りずに酷い出題を続けるものだ。さらに，2 年後の新課程入試では，数学 C も出題範囲に含まれることが通知された。数学 B，C の計 4 分野から 3 問選択に。文系の生徒にも数学 C を必修にするとは。教科書を全員に購入させるためか。現在同様ベクトルを数学 B に，統計を数学 C に入れるべきであったのは明白。有識者の判断ミスが如何に高校のカリキュラムを歪めたかは周知の如し。ますます我が国の高校数学教育は混迷を深めることに。決定に関与した人びとは天下の大罪人かと。情報も教科に追加される。単位数に比例して 50 点か。3 年次に単位のない高校は受験指導が不可能か。

ここまで，世に出た問題を批判してきたが，良問出題が当然との一心から。優れた過去問を再利用する手もある。新傾向や身近な素材にこだわらず，柔軟な姿勢で良問の出題を。筆者も日程など諸条件さえ合えば，事前に審査・改題して差し上げることは可能。ただし，2022 年度については改題不能。小手先のごまかしでは無理。昨年 6 月，共通テストの難易度が「あまり適切でない」「設問は時間に比して多く，計算量の多い設問も散見された」との外部評価を受けた。これを受け，センターの問題作成部会は，時間配分と計算量の多さに課題があったとの見解を公表した。文部科学相も 7 月閣議後，センターに注文をつけた。遅い，遅すぎる。本当に改善できるのか，甚だ疑問。

今回ご紹介した一般化などの考察は，大部分が休日遠距離ロードや県内外の山の頂や尾根などで考えたもの。さらに，昨年度から県東部の某私立高校にもお世話になっている。爽やかな日限定の通勤ロード約 1 時間も，私にとっては大切な究極・至高の思考時間。思考実験も多く試行している。駅前駐輪場を管理する旧知の元予備校職員にも出会い，勇気を戴いている。作問能力，改題能力，暗算能力は格段の進歩を遂げた。しかしながら，私もまだまだ発展途上人。枕を濡らして眠れぬ夜を過ごすこともしばしば。これからも進化を続けて参ります。教師たるもの，生涯求道者。収束などいたしません。最後になりましたが，本論文に多大のご協力とご示唆をいただいた山陰の雄，奥田俊一朗先生（米子西高校）に深く感謝申しあげます。また，発表の機会をくださった編集委員の先生方，そして拙作を最後までお読みくださった読者の皆様に御礼申しあげます。

参考文献

山川　宏史　フォーカスゴールド数学 I ＋A 5th Edition（共著）の実戦編　　啓林館