数学同好会指導報告など

山　川　宏　史

岡山朝日研究紀要 第44号（2023年３月）抜刷
〒703-8278 岡山市中区古京町2-2-21

数学同好会指導報告など

山 川 宏 史

1 はじめに

竹田前校長先生，平田現校長先生の粋なお取り計らいにより，昨年度より数学同好会の外部指導者を仰せつかっている。常勤の晩年に同好会顧問をした続きで，優秀な意欲ある生徒諸君と貴重なひとときを過ごさせて戴いている。このたび機会を与えられたので，近年の指導報告やその周辺の興味深い数学的事実について述べることにした。天下の朝日高校ゆえ，本論文の一部は平素の授業ネタとしても使えるかもしれぬ。どうぞお手軽に，有効にご利用ください。

2 平素の指導について

昨年度は解析学の，今年度は線型代数学のそれぞれ大学初年度用のテキストを用いて，私の勤務日である水曜日放課後随時講読・輪読の時間を生徒諸君と共有した。昨年度は「$\varepsilon-\delta$ の会」今年度は「線型代数の会」と称して，数学同好会に限らず広く全学年から参加者を募った。裾野を大きく拡げたため，内容にはかなり気を遣った。1 年生にも理解できるようテキスト選定には細心の注意を，そして現地調達方式での事前準備を講義中に行った。受講者とこちらの努力の結果，かの著名な名誉教授の特別講義より遥かに明解との評判であった。リモート講義との差もあったか。

昨年度はすでに大学初年度の知識のある生徒が存在したので，数名の生徒に順番でゼミ形式輪読をさせることもあった。今年度はかような特別な生徒は存在しなかったので，残念ながらそれには至らなかった。コロナ禍による休校や部活動禁止令などのために，途切れ途切れになったことが誠に残念。昔とは違い，最近は丁寧な記述のわかりやすい大学版テキストが多く出版されている。今の大学生は学習しやすく羨ましい。1 年生も参加するのでさらに丁寧にわかりやすく講義をした。また，基本的に予習を課さないので，軽く前回の振り返りをしたり，一方的な講義に終わることなく毎回必ず演習・実習的な計算実演の時間を取り入れた。計算実習で生徒の反応をつぶさに確認できるし，実地演習により理解が深まったという生徒の感想が多かった。また，テキストに掲載されていない内容や，大学では決して詳しく教えてくれないことも随時単純明解に講義や実演を行った。

例えば，次ページの定理は高校で数学的事実として天下り的に暗記させられるが，大学では厳密に $\varepsilon-n$ 論法で証明する。講座では，論理記号を定義した後，数列の極限値についての厳密な定義

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \text{ とは } \quad {}^{\forall}\varepsilon>0,\ {}^{\exists}n_0\in\mathbb{N}\ ;\ n\geqq n_0 \Longrightarrow |a_n-\alpha|<\varepsilon$$

を与えて，易しい例：$a_n=\dfrac{1}{n}$ くらいで具体的に $n_0=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$ にするとよいことを実演後に，証明を次の如く実演した。大学では，Archimedean principle により「$n_0\geqq\dfrac{1}{\varepsilon}$ を満たす n_0 を取ればよい」とあっさり済ませるのに対して高校ではこの程度教えないと理解が厳しい。さらに，1 年生のための事前準備としてその場で三角不等式も証明，明快な覚え方「学校帰りに塾に寄ると，一般的には遠回り」も教えておいた。これは，私が頻繁に活用する授業ネタ。授業中の生徒は大喜び。

定理 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$（ともに有限確定値）のとき，$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$ である。

証明 $\forall\varepsilon>0$，($\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ であるから) 定まった特定の $\frac{\varepsilon}{2}$ に対して $\exists n_1\in\mathbb{N}$；$n\geqq n_1 \Longrightarrow |a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$

($\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ であるから) 定まった特定の $\frac{\varepsilon}{2}$ に対して $\exists n_2\in\mathbb{N}$；$n\geqq n_2 \Longrightarrow |b_n-\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$

ここで，自然数 n_0 を $\max(n_1,\ n_2)$ と定めると

$n\geqq n_0 \Longrightarrow |a_n+b_n-(\alpha+\beta)|\leqq|a_n-\alpha|+|b_n-\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ （∵ 三角不等式による）

確かにかような自然数 n_0 が取れたので，$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$ 圏

@大昔の名著「解析概論」を始め，多くのテキストにもかような証明は掲載されているが，論理の肝心な部分である

ε を任意に取ってきたが，その確定した ε に対して $\frac{\varepsilon}{2}$ を考えると，自然数 n_1 が取れる。

という部分が曖昧にされているものが多い。ここをきちんと押さえなければ，高校生に理解させることは不可能。恥ずかしながら，大学入学直後の私は結構苦労した。若い頃の苦労はそれなりに報われるというもの。ただ，$\frac{\varepsilon}{2}$ の出所は三角不等式であり，証明のストーリーを考えた後にやっとこの $\frac{\varepsilon}{2}$ に辿り着くという話もしておいた。また，余談ではあるが，max 関数を絶対値を用いて表現する実地訓練も突如実施。発問後しばし待つと，数名の生徒は次の如き正解に辿り着いた。

$\max(a,\ b)=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$，$\min(a,\ b)=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$

→ 果たして，3 個版は如何に。これは講座時間中には無理であった。次回持ち越しに。

さらに，この実演を行ったあとで次の定理を証明させる実習時間も確保した。

定理 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$（ともに有限確定値），$k$（定数）のとき，$\lim_{n\to\infty} ka_n=k\alpha$，$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$

@前者は，先の証明を真似ればよい。実習中机間巡視をすると，1 年生もできていた。$\frac{\varepsilon}{2}$ の詳しい説明の効果かと。後者は積の導関数の証明途中の式変形を知らないと厳しいので，2 年生の一部だけできていた。なお，この証明を授業前に後ろ黒板に板書していた 2 年理系クラスがあり，授業で数分間触れる時間が取れた。一部の生徒は大喜びしていた。さすがは天下の朝日，かような波及効果も大いに期待できる。

また，ある時には転置行列，対称行列，交代行列を定義し，転置をとる操作の線型性を証明後，次の線型代数学の定理を講座の最後に提示した。次回講座まで生徒に考えさせ，講座冒頭できちんと証明実演を行ったが，それまでに証明ができた生徒はいなかった。生徒に自力で考えさせる期間を確保するのが目的。この考える期間が平素の高校数学教育では取られていないかもしれぬ。私の授業では，必ずかような思考期間を取り入れることにしている。

定理 n 次の任意正方行列 A は，n 次の対称行列 B と交代行列 C の和として一意的に表される。

証明 $A=B+C$ ……① ${}^tB=B$，${}^tC=-C$

と表されたとする。ここで

${}^tA={}^t(B+C)$

$={}^tB+{}^tC=B-C$ ……② （∵ 転置の線型性）

①+② により　$B=\frac{1}{2}(A+{}^tA)$　　　①−② により　$C=\frac{1}{2}(A-{}^tA)$

このとき，確かに

$${}^tB=\frac{1}{2}({}^tA+A)=B,\ {}^tC=\frac{1}{2}({}^tA-A)=-C$$

となり，条件を満たしている。また，行列 A が1つ定まれば，かような B，C はこの計算式により，一意的に定まる。　㊗

@もし表すことができたら，と設定して式変形を試みる典型問題。かような技法はたまに用いられる。特に幾何の証明に多い。ただし，最後に求まったものが本当に対称行列，交代行列であるかどうかを確認しておかなければならぬことに注意。さもなくば，机上の空論に。残念ながら，大学のテキストにはこの事実を掲載していないものや，天下り的にこの B，C を与えているものが多い。私の大学時代もそうであった。恥ずかしながら，当時の私はこの証明さえ怠り，教授の天下り説明を受け入れていた。これでは，大学生の探究心も削がれるというもの。さらに，この証明は次に述べる事実にも適用できることを講座中に生徒に教えた。生徒は大喜びしていた。数学の先生方でもご存じない方がいらっしゃるようだ(失礼!)。校長先生はもとより，時々先生方も講座にお顔を出してくださることがあり，私は果報者かと。失礼ながら，先生方の研修効果も。もちろん，熱意にお応えし指名して差し上げることもしばしば。楽しい講座に。

定理 正負に跨る定義域をもつ任意の関数は，偶関数と奇関数の和として一意的に表される。

証明 関数 $f(x)$ に対して，$f(x)=g(x)+h(x)$ …… ①　$g(-x)=g(x)$，$h(-x)=-h(x)$

と表されたとする。

$$\begin{aligned} f(-x)&=g(-x)+h(-x)\\ &=g(x)-h(x) \text{ …… ②} \end{aligned}$$

①+② により　$g(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}$

①−② により　$h(x)=\frac{1}{2}\{f(x)-f(-x)\}$

このとき，確かに

$$g(-x)=\frac{1}{2}\{f(-x)+f(x)\}=g(x),\ h(-x)=\frac{1}{2}\{f(-x)-f(x)\}=-h(x)$$

となり，条件を満たしている。また，関数 $f(x)$ が1つ定まれば，かような $g(x)$，$h(x)$ はこの計算式により，一意的に定まる。　㊗

@私は，十数年前にやっとこの事実に気づいた。先の証明と論理構造は同一。なお，正負に跨る定義域をもつという条件は必須。さもなくば，x，$-x$ の共通定義域が存在しない場合もある。例えば，$f(x)=\sqrt{x}$，$f(x)=\log x$ など。これらは平行移動して，$f(x)=\sqrt{x+1}$，$f(x)=\log(x+1)$ にすれば，定義域は存在する。ただし，定義域は大きく制限されることに。さらに，次の形にも適用できることがわかる。

定理 x，y の任意の数式は，対称式と交代式の和として一意的に表される。

証明 数式 $f(x,\ y)$ に対して

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2}\{f(x,\ y)+f(y,\ x)\}+\frac{1}{2}\{f(x,\ y)-f(y,\ x)\}$$

であることが先の定理同様わかる(詳細略)。　㊗

@この事実には近年気づいた。数式は多項式に限らず，三角関数など高級な関数でもよい。例えば

$$\sin(x+2y)=\frac{1}{2}\{\sin(x+2y)+\sin(2x+y)\}+\frac{1}{2}\{\sin(x+2y)-\sin(2x+y)\}$$

となる。

これに勢いづいて，次の如き命題は如何に。

例 任意の関数は，非負の値域をもつ関数と非正の値域をもつ関数の和として表される。

証明 先の定理同様，関数 $f(x)$ に対して，$g(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+|f(x)|\}$，$h(x)=\frac{1}{2}\{f(x)-|f(x)|\}$

とおけば

$$f(x)=g(x)+h(x),\quad g(x)\geqq 0,\quad h(x)\leqq 0$$

となり，条件を満たしている。　終

@ 一意性は叶わず。その理由は，先の定理同様な計算に挑めば

$$f(x)=g(x)+h(x),\quad |g(x)|=g(x),\quad |h(x)|=-h(x)$$

と設定するのは自然であるが，絶対値を分けるための計算を

$$|f(x)|=|g(x)+h(x)|=|g(x)|+|h(x)|=g(x)-h(x)$$

とできないからである。真ん中の等号は，三角不等式により不等号にならざるを得ない。実際に，1 以上の定数 k について

$$g(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+k|f(x)|\},\quad h(x)=\frac{1}{2}\{f(x)-k|f(x)|\}$$

が条件を満たすことはすぐにわかる。ゆえに，一意性は叶わず。なお，線型代数学の講義では連立 n 元 1 次方程式の逆行列を用いた解法が好評であった。ただし，本当に逆行列を求めるのは実用的にあらず。掃き出し法で求める解法を具体例で教えておいた。不思議がる生徒が多かった。

3 Σ講座とその周辺について

テキスト定期講読とは別に，随時高校教科書レベルを遙かに超えた話題についても講座で扱った。例えば，昨年 6 月に実施した Σ 講座がそうであった。この当時，2 年生は履修直後，1 年生には完全に未知の世界。したがって，和の記号 Σ の定義やその線型性の証明から講義は始まった。限られた時間で Σ 公式を次々に要領よく証明するために，まずは教科書にはない次の補題を証明した。

補題 N を自然数とするとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+N-1)=\frac{1}{N+1}n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+N)$

証明 $\displaystyle(\text{左辺})=\frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+N-1)\{k+N-(k-1)\}$　← 最後の中括弧がポイント

$$=\frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{n}[\{-(k-1)k(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+N-1)\}+\{k(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+N-1)(k+N)\}]$$

この式をΣを用いずに順に書き並べると，階差型ゆえ途中がすべて消えて　← 順番にも拘る！

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+N-1)=-0+\frac{1}{N+1}n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+N)$$

$$=(\text{右辺})$$　終

@この補題を用いると，$N=1$ の場合が $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k$ そのもの。$N=2$ の場合が $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ に適用できて，次の如く完全に暗算レベル。これを私が実演した。

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n}(k-1)k + \sum_{k=1}^{n} k$$ ← 補題が使えるよう変形，スタートを $k-1$ に

$$= \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(n-1)+3\} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

そして，$N=3$ の場合により $\sum_{k=1}^{n} k^3$ もほぼ暗算レベルで導くことが可能。これを生徒が実習した。

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1) + \sum_{k=1}^{n} k$$ ← この式変形は容易

$$= \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2) + \frac{n}{2}(n+1)$$

$$= \frac{n}{4}(n+1)(n^2+n-2+2) = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

途中で補題をうまく適用することがポイント。途中がすべて消えて，$f(n)-f(0)$ の形になることが保証されている。$N=5$ の場合により $\sum_{k=1}^{n} k^5$ も次の如く見事に導出できた生徒が 1 名だけ存在した。

$$\sum_{k-1}^{n} k^5 = \sum_{k-1}^{n}(k^5-5k^3+4k) + \sum_{k-1}^{n}(5k^3-4k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2) + \sum_{k=1}^{n}(5k^3-4k)$$

$$= \frac{1}{6}(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) + \frac{5}{4}n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)$$

ここで，積の順序を変えて $A=n^2+n$ とおくと　　← この置き換えに気づくと暗算可能に

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(n-1)(n+2)(n-2)(n+3) + \frac{5}{4}n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}A(A-2)(A-6) + \frac{5}{4}A^2 - 2A$$

$$= \frac{1}{12}A(2A^2-16A+24+15A-24)$$

$$= \frac{1}{12}A^2(2A-1)$$

$$= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

この生徒や当日ご参加下さった先生方は置き換えには気づけなかった。それゆえ暗算では不可能。

なお，この正解生徒は $\sum_{k=1}^{n} k^4$ も次の如く導出できていたのは誠に立派。

$N=4$ の場合を用いると

$$\sum_{k-1}^{n} k^4 = \sum_{k-1}^{n}(k^4-k^2) + \sum_{k-1}^{n} k^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1)(k-2+2) + \sum_{k=1}^{n} k^2$$ ← 左Σ最後の括弧の中が変形ポイント

$$= \sum_{k-1}^{n}(k-2)(k-1)k(k+1) + 2\sum_{k-1}^{n}(k-1)k(k+1) + \sum_{k-1}^{n} k^2$$

$$=\frac{1}{5}(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+\frac{2}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{10}(n-1)n(n+1)(n+2)(2n-4+5)+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad \leftarrow \text{前 2 項だけ括る}$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)\{3(n-1)(n+2)+5\} \qquad \leftarrow \text{なんと，} 2n+1 \text{ も共通因数に}$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

読者諸賢は，どうぞ次の $\sum_{k=1}^{n}k^7$，$\sum_{k=1}^{n}k^6$ 式変形もご堪能あれ。

$N=7$ の場合を用いると

$$\sum_{k=1}^{n}k^7=\sum_{k=1}^{n}k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)+\sum_{k=1}^{n}(14k^5-49k^3+36k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)+\sum_{k=1}^{n}(14k^5-49k^3+36k)$$

$$=\frac{1}{8}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$+\frac{7}{6}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)-\frac{49}{4}n^2(n+1)^2+18n(n+1)$$

ここで，積の順序を変えて $A=n^2+n$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{n}k^7=\frac{1}{8}A(A-2)(A-6)(A-12)+\frac{7}{6}A^2(2A-1)-\frac{49}{4}A^2+18A$$

$$=\frac{1}{8}A(A^3-20A^2+108A)-18A+\frac{A^2}{12}(28A-14-147)+18A \quad \leftarrow 18A \text{ は放置，相殺}$$

$$=\frac{1}{24}A^2(3A^2-60A+324+56A-28-294)$$

$$=\frac{1}{24}A^2(3A^2-4A+2)$$

$$=\frac{1}{24}n^2(n+1)^2\{3n^2(n+1)^2-4n(n+1)+2\}$$

$$=\frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$$

次に，$N=6$ の場合を用いると

$$\sum_{k=1}^{n}k^6=\sum_{k=1}^{n}k(k^2-1)(k^2-4)k+\sum_{k=1}^{n}(5k^4-4k^2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k-3+3)$$

$$+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)-\frac{4}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{7}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)+\frac{1}{2}(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1-4)$$

ここで，積の順序を変えて $A=n^2+n$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{n} k^6=\frac{1}{14}A(A-2)(A-6)(2n-6+7)+\frac{1}{6}A(2n+1)(3A-5)$$

$$=\frac{1}{42}A(2n+1)\{3(A-2)(A-6)+21A-35\}$$

$$=\frac{1}{42}A(2n+1)\{3A^2-3A+1\}$$

$$=\frac{1}{42}A(2n+1)\{3(n^4+2n^3+n^2)-3n^2-3n+1\}$$

$$=\frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$

さすがにこれらの計算は暗算では無理。なお，区分求積法を用いると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^N=\frac{1}{N+1}\quad (N\neq -1)$$

と合致することもすぐに確認できる。

これらの考え方を一般化して，数学的帰納法を用いると次のことがわかる。ただし，最高次の係数の決定には区分求積法が必要。

N を自然数とするとき

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{2N+1}=n^2(n+1)^2f(n)$　ただし，$f(n)$ は n の $2N-2$ 次の整式で 最高次の係数は $\displaystyle\frac{1}{2N+2}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{2N}=n(n+1)(2n+1)g(n)$　ただし，$g(n)$ は n の $2N-2$ 次の整式で 最高次の係数は $\displaystyle\frac{1}{4N+2}$

次に，分数和を考えてみよう。3 連続自然数積の逆数和なら

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{k(k+2)}$$

$$=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

の部分分数分解により，Σ を用いずに順に書き並べると途中がすべて消えて

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\right)$$ ← この式変形は次の経験則

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n}{n+1}-\frac{n}{2(n+2)}\right\}$$ ← 別々計算で分子が同じに，これが数式センス

$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$ ← 分子の n を括り出した

とできる。真ん中の項を括り出す技がポイントで，身近な例で「3 人兄弟では真ん中の子が先頭に立つ勇気を」と私の授業では教えている。もちろん，4 人以上の兄弟にも話がおよび，この事実を $N\,(N\geqq 2)$ 個の場合に一般化すると，次の如き変形が可能となることまで授業で扱う。生徒は大喜び。これなら汎用性に富んでいることが，読者諸賢ならおわかりであろう。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots\cdots(k+N-1)}$$

$$=\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)\cdots\cdots(k+N-2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+N-1)}\right\}$$

$$=\frac{1}{N-1}\left\{\frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdots\cdot(N-1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+N-1)}\right\}$$

となる。ただし，最後を通分するのは現実的にあらず。実は，2019 年九州大学過去問に出題された。

問題 a を自然数とする。

(1) すべての自然数 n について，次の等式を証明せよ。

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\cdots\cdots(k+a-1)=\frac{1}{a+1}n(n+1)\cdots\cdots(n+a)$$

(2) $a\geqq 2$ のとき，次の等式が，すべての自然数 n について成立するような定数 b と c を求めよ。

$$\frac{b}{n(n+1)\cdots\cdots(n+a-2)}+\frac{c}{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+a-1)}=\frac{a-1}{n(n+1)\cdots\cdots(n+a-1)}$$

(3) 級数の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots\cdots(k+a-1)}$ について，収束するならばその極限値を求め，発散するならばこれを証明せよ。

解答 (1) 証明 $k(k+1)\cdots\cdots(k+a-1)=\dfrac{1}{a+1}\{k(k+1)\cdots\cdots(k+a)-(k-1)k\cdots\cdots(k+a-1)\}$

が成り立つ。

ここで，$f(k)=k(k+1)\cdots\cdots(k+a)$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\cdots\cdots(k+a-1)=\frac{1}{a+1}\sum_{k=1}^{n}\{-f(k-1)+f(k)\}$$ ← Σ の中身を逆順に!

$$=\frac{1}{a+1}\{-f(0)+f(1)-f(1)+f(2)+\cdots\cdots-f(n-1)+f(n)\}$$

$$=\frac{1}{a+1}\{-f(0)+f(n)\}$$

$$=\frac{1}{a+1}n(n+1)\cdots\cdots(n+a)$$ 終

(2) 与えられた等式の両辺の分母を払うと

$b(n+a-1)+cn=a-1$

$(b+c)n+(a-1)(b-1)=0$

この等式がすべての自然数 n について成立する条件は

$b+c=0$ かつ $(a-1)(b-1)=0$

$a\geqq 2$ であるから　　$b=1,\ c=-1$　答

(3) i) $a=1$ のとき

与えられた式は　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

面積を考えると　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\int_{1}^{n+1}\frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_{1}^{n+1}$

$=\log(n+1)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log(n+1)=\infty$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\infty$

ⅱ) $a \geqq 2$ のとき

(2) より $\dfrac{1}{k(k+1)\cdots\cdots(k+a-1)}$

$$=\frac{1}{a-1}\left\{\frac{1}{k(k+1)\cdots\cdots(k+a-2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+a-1)}\right\}$$

$g(k)=\dfrac{1}{k(k+1)\cdots\cdots(k+a-2)}$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots\cdots(k+a-1)}$$

$$=\frac{1}{a-1}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)\cdots\cdots(k+a-2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+a-1)}\right\}$$

$$=\frac{1}{a-1}\sum_{k=1}^{n}\{g(k)-g(k+1)\}$$

$$=\frac{1}{a-1}\ [\{g(1)-g(2)\}+\{g(2)-g(3)\}+\cdots\cdots+\{g(n)-g(n+1)\}]$$

$$=\frac{1}{a-1}\{g(1)-g(n+1)\}$$

$$=\frac{1}{a-1}\left\{\frac{1}{(a-1)!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+a-1)}\right\}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots\cdots(k+a-1)}=\frac{1}{(a-1)!(a-1)}$

ⅰ)，ⅱ) から，求める極限は

$a=1$ のとき発散，$a\geqq 2$ のとき $\dfrac{1}{(a-1)!(a-1)}$ に収束する。 答

また，2006 年大阪大学過去問にも，次の如く出題されていた。

問題 x，y を変数とする。

(1) n を自然数とする。次の等式が成り立つように定数 a，b を定めよ。

$$\frac{n+1}{y(y+1)\cdots\cdots(y+n)(y+n+1)}=\frac{a}{y(y+1)\cdots\cdots(y+n)}+\frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots\cdots(y+n+1)}$$

(2) すべての自然数 n について，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}$$

解答 (1) 等式の両辺の分母を払うと

$n+1=a(y+n+1)+by$

$n+1=(a+b)y+a(n+1)$

これが y についての恒等式であるから

$a+b=0$ かつ $a(n+1)=n+1$

$n+1\fallingdotseq 0$ であるから $a=1$，$b=-1$ 答

(2) 証明 $\dfrac{n!}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)}=\displaystyle\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}$ ……① とする。

すべての自然数 n について ① が成り立つことを，数学的帰納法で示す。

Ⅰ $n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=\frac{1!}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}$$

$$(\text{右辺})=\sum_{r=0}^{1}(-1)^r\frac{{}_1\mathrm{C}_r}{x+r}=(-1)^0\frac{{}_1\mathrm{C}_0}{x}+(-1)^1\frac{{}_1\mathrm{C}_1}{x+1}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}$$

よって，① は $n=1$ のとき成り立つ。

Ⅱ $n=k$ のとき ① が成り立つと仮定する。

$$\frac{k!}{x(x+1)\cdots\cdots(x+k)}=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+r} \quad \cdots\cdots ②$$

この仮定から，② の x を $x+1$ でおき換えた

$$\frac{k!}{(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+1+k)}=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+1+r} \quad \cdots\cdots ③$$

も成り立つ。

$n=k+1$ のとき，① の左辺について考えると，(1) により

$$\frac{(k+1)!}{x(x+1)\cdots\cdots(x+k+1)}=k!\cdot\frac{k+1}{x(x+1)\cdots\cdots(x+k+1)}$$

$$=\frac{k!}{x(x+1)\cdots\cdots(x+k)}-\frac{k!}{(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+k+1)}$$

$$=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+r}-\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+1+r} \qquad (\because ②,\ ③\ \text{より})$$

$$=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+r}+\sum_{r=0}^{k}(-1)^{r+1}\frac{{}_k\mathrm{C}_{(r+1)-1}}{x+(r+1)}$$

$$=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+r}+\sum_{r=1}^{k+1}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_{r-1}}{x+r}$$

$$=(-1)^0\frac{{}_k\mathrm{C}_0}{x+0}+\sum_{r=1}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r+{}_k\mathrm{C}_{r-1}}{x+r}+(-1)^{k+1}\frac{{}_k\mathrm{C}_k}{x+k+1}$$

$$=(-1)^0\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_0}{x+0}+\sum_{r=1}^{k}(-1)^r\frac{{}_{k+1}\mathrm{C}_r}{x+r}+(-1)^{k+1}\frac{{}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}}{x+k+1}$$

$$=\sum_{r=0}^{k+1}(-1)^r\frac{{}_{k+1}\mathrm{C}_r}{x+r}$$

よって，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

Ⅰ，Ⅱ から，① はすべての自然数 n について成り立つ。　終

三角関数の有名 Σ 公式もある。講座プリントでは，June present ということで出題してみたが，結局生徒から正解は出されなかった。かように長期間考えさせても無駄なこともあるというもの。

公式 (1) $$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\begin{cases}\dfrac{\cos\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}} & (x\fallingdotseq 2m\pi,\ m\ \text{は整数})\\ n & (x=2m\pi,\ m\ \text{は整数})\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\begin{cases}\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}} & (x\fallingdotseq 2m\pi,\ m\text{ は整数})\\ 0 & (x=2m\pi,\ m\text{ は整数})\end{cases}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x=\begin{cases}\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x} & (x\fallingdotseq m\pi,\ m\text{ は整数})\\ n & (x=2m\pi,\ m\text{ は整数})\\ -n & (x=(2m-1)\pi,\ m\text{ は整数})\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 2nx}{2\sin x} & (x\fallingdotseq m\pi,\ m\text{ は整数})\\ 0 & (x=m\pi,\ m\text{ は整数})\end{cases}$$

$\boxed{\text{証明}}$ (1)・$x\fallingdotseq 2m\pi$ (m は整数) のとき

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\sum_{k=1}^{n}2\cos kx\sin\frac{x}{2}$$ ← $2\sin\dfrac{x}{2}$ を掛けて変形するのがポイント！

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\sin\left(kx+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(kx-\frac{x}{2}\right)\right\}$$ ← 積和交換公式

$$=\left(-\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3}{2}x\right)+\left(-\sin\frac{3}{2}x+\sin\frac{5}{2}x\right)$$

$$+\cdots\cdots+\left(-\sin\frac{2n-1}{2}x+\sin\frac{2n+1}{2}x\right)$$ ← 順番にも拘る！

$$=\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{x}{2}$$

$\sin\dfrac{x}{2}\fallingdotseq 0$ であるから　$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}x-\sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

$$=\frac{\cos\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$$ ← 和積交換公式

・$x=2m\pi$ (m は整数) のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos kx=1+1+1+\cdots\cdots+1=n$

同様にして　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin kx$ もわかる（詳細略）。　終

(2)・$x\fallingdotseq m\pi$ (m は整数) のとき

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x=\sum_{k=1}^{2n}\cos kx-\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx$$

$$=\frac{\cos\dfrac{2n+1}{2}x\sin\dfrac{2n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}-\frac{\cos\dfrac{n+1}{2}2x\sin\dfrac{n}{2}2x}{\sin\dfrac{2x}{2}}$$ （(1) の結果による）

$$=2\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{\cos\dfrac{2n+1}{2}x\sin nx}{2\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}}-\frac{\cos(n+1)x\sin nx}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin nx}{\sin x}\{\cos(n+1)x+\cos nx-\cos(n+1)x\}$$ ← 積和交換公式

$$=\frac{\sin nx\cos nx}{\sin x}=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$$

・$x=2m\pi$（m は整数）のとき　$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x=1+1+1+\cdots\cdots+1=n$

・$x=(2m-1)\pi$（m は整数）のとき　$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x=-1-1-1-\cdots\cdots-1=-n$

$\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x$ については，変形が

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x=\sum_{k=1}^{2n}\sin kx-\sum_{k=1}^{n}\sin 2kx$$

$$=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x\sin\frac{2n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}-\frac{\sin\frac{n+1}{2}2x\sin\frac{n}{2}2x}{\sin\frac{2x}{2}}$$ （(1) の結果による）

$$=2\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x\sin nx}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}-\frac{\sin(n+1)x\sin nx}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin nx}{\sin x}\{\sin(n+1)x+\sin nx-\sin(n+1)x\}$$ ← 積和交換公式

$$=\frac{\sin nx\sin nx}{\sin x}=\frac{1-\cos 2nx}{2\sin x}$$

となる。ほかは略。　㊙

@(1) は最初の考え方が難しい。しかし，見事な階差型変形。(2) は (1) を利用したが，(1) と同様に計算すると分数計算が楽。読者諸賢はお試しあれ。なお，これらの証明には，Euler’s formula

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

を用いた cos，sin を同時に求めるスーパー別解が次の如く存在する。

$x\fallingdotseq 2m\pi$ のとき，このΣは有限和ゆえ

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx+i\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}$$ ← 和の順番を変えた

$$=\frac{e^{ix}(e^{inx}-1)}{e^{ix}-1}$$ （$\because$ $x\fallingdotseq 2m\pi$，等比数列の和の公式）

$$=\frac{(\cos x+i\sin x)(\cos nx-1+i\sin nx)}{\cos x-1+i\sin x}$$ ← 極形式に

$$=(\cos x+i\sin x)\cdot\frac{-2\sin^2\frac{nx}{2}+2i\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{nx}{2}}{-2\sin^2\frac{x}{2}+2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$ ← 倍角公式

$$=(\cos x+i\sin x)\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos\left(\frac{nx}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{nx}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$$ ← 工夫

$$=\frac{\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}+i\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

（∵de Moivre's formula）

実部と虚部をそれぞれ比較すると一発でわかる。この解法は次の如く中身が等差数列でも

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\{a+(k-1)d\} \qquad \sum_{k=1}^{n}\sin\{a+(k-1)d\}$$

の計算が可能。読者諸賢はどうぞお試しあれ。$a=d=x$ の場合には上の結果と一致することもわかる。なお，2019 年東北大学過去問には，この有名公式が次の如く出題されていた。

問題 n を正の整数とする。

(1) 等式 $\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)\sin\frac{x}{2}=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x$ が成り立つことを示せ。

(2) 方程式 $\sum_{k=1}^{n}\cos kx=0$ の解 x をすべて求めよ。

解答 (1) 証明 $2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\sum_{k=1}^{n}2\cos kx\sin\frac{x}{2}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\sin\left(kx+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(kx-\frac{x}{2}\right)\right\} \quad \leftarrow \text{積和交換公式}$$

$$=\left(-\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3}{2}x\right)+\left(-\sin\frac{3}{2}x+\sin\frac{5}{2}x\right)$$

$$+\cdots\cdots+\left(-\sin\frac{2n-1}{2}x+\sin\frac{2n+1}{2}x\right) \quad \leftarrow \text{順番にも拘る！}$$

$$=\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{x}{2}$$

よって　（左辺）$=\sin\frac{x}{2}+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx\sin\frac{x}{2}$

$$=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{x}{2}$$

$$=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x=(\text{右辺}) \quad \text{終}$$

(2) (1) の等式により　$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}$

i) $\sin\frac{x}{2}=0$ のとき　$\frac{x}{2}=l\pi$ （l は整数）　すなわち　$x=2l\pi$　のとき

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\sum_{k=1}^{n}\cos 2kl\pi=\sum_{k=1}^{n}1=n$$

n は自然数であるから　$\sum_{k=1}^{n}\cos kx\neq 0$　よって，解にはならない。

ii) $\sin\frac{x}{2}\neq 0$　すなわち　$x\neq 2l\pi$ のとき

(1) より，$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=0$ となるための条件は　$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}=0$

$$2\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{x}{2}}{2}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\frac{x}{2}}{2}=0 \qquad \text{よって} \qquad \cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x=0$$

したがって　　$\cos\frac{n+1}{2}x=0$　または　$\sin\frac{n}{2}x=0$

$\cos\frac{n+1}{2}x=0$ のとき，m を整数とすると　　$\frac{n+1}{2}x=\frac{\pi}{2}+m\pi$　すなわち　$x=\frac{2m+1}{n+1}\pi$

$\sin\frac{n}{2}x=0$ のとき，　m' を整数とすると　$\frac{n}{2}x=m'\pi$　　すなわち　$x=\frac{2m'}{n}\pi$

ここで，ⅰ) を考慮すると，$x=\frac{2m'}{n}\pi$ において，$\frac{m'}{n}$ が整数でない，すなわち m' は n の倍数でないことが $\sum_{k=1}^{n}\cos kx=0$ となるための条件となる。

以上より，m' を m におき換えて，求める解 x は

$$x=\frac{2m+1}{n+1}\pi\ (m\text{ は任意の整数})\quad\text{または}\quad x=\frac{2m}{n}\pi\ (m\text{ は }n\text{ の倍数でない整数})$$ 答

@(1) は先ほどと同じような証明。証明すべき式の左辺が非常に易しくなっている。これなら，積和交換公式が定着している受験生は完解可能。式変形の練習量により大差がついた問題。しかし，(2) は試験会場では厳しい。三角関数大好き大学東北大後期理学部の入試問題。

4 おわりに

筆者は非常勤 2 年目の新参者。今年度は勤務校を合算すると，50 分授業換算で 1 週間あたり 25 コマ担当させて戴いた。本校で特別講座のある週はさらに増加。授業ネタや講座ネタは平素の生活の中で考える主義。校務分掌や雑用が一切ないので，実は楽な仕事に。ただし，収入は激減。これまで常勤時代，いかに雑用に対する収入が高かったかを実感した。雑用がおもな仕事とは如何に。現在は 24 時間数学が身近な幸せ者。授業者たるもの，ステージ上の artist が如し。当日の観客ニーズの瞬間的把握，語り，間の取り方，ステージの使い方など，極めるのは一生もの。虎や獅子が強いのには理由がある。元から強い上に，生き抜いていくこと自体が鍛錬の場ゆえ。私もかくありたし。現在は，日々新しい数学ネタを狩りながら遠距離ロードに出かけたり，山野を彷徨い歩くハンターが如し。これまで校長先生はじめ諸先生方のお導き，生徒諸君との温かい触れ合いのもとで今年度も無事に生きていくことができました。なお，各種ネタは次の文献に収録されたものも多し。本校最高の教え子で『高校数学の美しい物語』を主宰するマスオ君に送付したら，すぐ HP に反映してくれた作品も。これらはすべて筆者の貴重な財産。最後になりましたが，講座開催にご尽力くださった顧問の内田先生，田中先生はじめ諸先生方，発表の機会をくださった編集委員の先生方，そして拙作を最後までお読みくださった読者の皆様，ありがとうございました。

参考文献

山川　宏史　フォーカスゴールド数学Ⅰ+A 5th Edition (共著) の実戦編　啓林館
山川　宏史　フォーカスゴールド数学Ⅱ 5th Edition (共著) の実戦編　啓林館
山川　宏史　フォーカスゴールド数学 B+C 5th Edition (共著) の実戦編　啓林館
山川　宏史　フォーカスゴールド数学Ⅲ 5th Edition (共著) の実戦編　啓林館