放物線の極と極線を深く探る

山　川　宏　史

岡山朝日研究紀要 第44号（2023年３月）抜刷
〒703-8278 岡山市中区古京町2-2-21

放物線の極と極線を深く探る

山　川　宏　史

1 はじめに

円の極と極線は広く知られ，大学入試問題にもしばしば登場する。このたび機会を与えられたので，放物線に対しても極と極線が定義でき，さまざまな性質をもつことを探ることにした。実は，個別大学入試にも密かに出題されている。令和７年度からの共通テスト数学Ｃ分野でも狙われる可能性もあるか。最近の共通テストの暴走然り。受験生は知っておくと有利になることも予想される。指導者として，是非知識に入れておきたいものだ。なお，放物線の接線公式

放物線：$x^2=4py$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は　$x_1x=2p(y+y_1)$

が大活躍する。

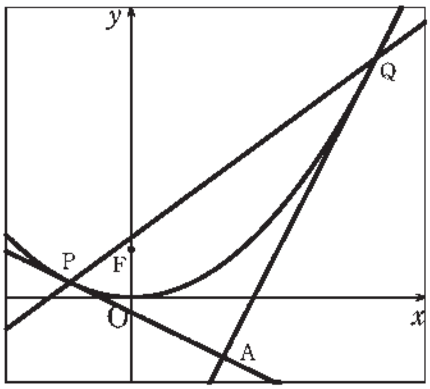
2 放物線の極と極線

定義

放物線 C：$x^2=4py\ (p\neq 0)$ に関して焦点 $\mathrm{F}(0,\ p)$ と反対側に点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとると，必ず点Ａから曲線 C に２本の接線を引くことができる。２つの接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ とするとき，点Ａを極 (pole)，直線 PQ を極線 (polar line) という。

公式

上の設定で，点Ａに対する極線の方程式は　$ax=2p(y+b)$　である。



証明 接線 AP の方程式は　　$x_1x=2p(y+y_1)$

これが点Ａを通るので　　$ax_1=2p(y_1+b)$ ……①

接線 AQ の方程式は　　$x_2x=2p(y+y_2)$

これが点Ａを通るので　　$ax_2=2p(y_2+b)$ ……②

①，②より，２点 P，Q は直線 $ax=2p(y+b)$ 上にある。２点を通る直線は１本しかないので，これが求めるものである。　終

@円の極や極線とまったく同じ議論である。同様に，２次曲線である楕円や双曲線の極と極線も公式化可能。なお，この公式は実は 2021 年に大阪大学文系学部で，次の如く中盤にその証明が出題されていた。文系ゆえ，解答に放物線の接線公式を必要としない配慮も。

2021 年大阪大学文系第１問

a を実数とする。C を放物線 $y=x^2$ とする。

(1)　点 $\mathrm{A}(a,\ -1)$ を通るような C の接線は，ちょうど２本存在することを示せ。

(2)　点 $\mathrm{A}(a,\ -1)$ から C に２本の接線を引き，その接点を P，Q とする。直線 PQ の方程式は $y=2ax+1$ であることを示せ。

(3)　点 $\mathrm{A}(a,\ -1)$ と直線 $y=2ax+1$ の距離を L とする。a が実数全体を動くとき，L の最小値とそのときの a の値を求めよ。

解答 (1) 証明 $y'=2x$ より，放物線 $C：y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y-t^2=2t(x-t) \qquad y=2tx-t^2$$

接線 ℓ が点 A $(a,\ -1)$ を通る条件は　$-1=2ta-t^2$　すなわち　$t^2-2at-1=0$

この2次方程式の実数解の個数は，点 A を通るような C の接線の本数と一致する。

この方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-1\cdot(-1)=a^2+1>0$

よって，この2次方程式は異なる2つの実数解をもつから，点 A を通るような C の接線はちょうど2本存在する。 終

(2) 証明 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とすると，(1) より点 P，Q における C の接線の方程式は

$$y=2px-p^2, \quad y=2qx-q^2$$

である。これらが点 A $(a,\ -1)$ を通るから

$$p^2=2ap+1,\ q^2=2aq+1$$

これは，直線 $y=2ax+1$ が異なる2点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ を通ることを表している。

よって，直線 PQ の方程式は $y=2ax+1$ である。 終

(3)　条件から　$L=\dfrac{|2a\cdot a-(-1)+1|}{\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4a^2+1+3}{\sqrt{4a^2+1}}$　← 絶対値は解消　分子に $4a^2+1$ をつくる！

$=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{4a^2+1}+\dfrac{3}{\sqrt{4a^2+1}}\right)$　← この式変形は，文系の受験生にはやや厳し

$\sqrt{4a^2+1}>0$ であるから，相加平均･相乗平均の大小関係により

$$L \geqq \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

等号が成り立つのは，$\sqrt{4a^2+1}=\dfrac{3}{\sqrt{4a^2+1}}$ のとき

すなわち　$4a^2+1=3$　すなわち　$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　のときに限る。

したがって，L は $a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で最小値 $\sqrt{3}$ をとる。 答

@(1) は教科書レベル。微分を使わずとも，(判別式)=0 でも可。(2) は円の極と極線の経験があれば瞬殺。ない場合には，案外厳し。運命の分かれ目。(3) の式変形は，文系受験生にはやや厳し。分母 $\sqrt{4a^2+1}$ を b などの文字に置き換えて

$$L=\frac{2a^2+2}{b}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4a^2+1+3}{b}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2+3}{b}=\frac{1}{2}\left(b+\frac{3}{b}\right)$$

とすれば同じ計算となり，文系受験生にも無理はない。なお，この問題は次の如く一般化可能。

放物線 $C: x^2=4py$，点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ があり $(p>0,\ b\leqq -2p)$，A を極とする極線と A の距離を L とする。a が実数全体を動くとき，L は $a=\pm 2\sqrt{-p(2p+b)}$ において最小値 $4\sqrt{-p(p+b)}$ をとる。

証明 極線の方程式は　$ax=2p(y+b)$　であるから

$$L=\frac{|a^2-2p(b+b)|}{\sqrt{a^2+4p^2}}$$

$$=\frac{a^2-4pb}{\sqrt{a^2+4p^2}} \quad (\because a^2-4pb>0 \text{ より})$$

$$=\sqrt{a^2+4p^2}+\frac{-4p(p+b)}{\sqrt{a^2+4p^2}}$$

$\sqrt{a^2+4p^2}>0$，$-4p(p+b)>0$ であるから，相加平均･相乗平均の大小関係により

$$L\geqq 2\sqrt{-4p(p+b)}=4\sqrt{-p(p+b)}$$

等号が成り立つのは，$\sqrt{a^2+4p^2}=\dfrac{-4p(p+b)}{\sqrt{a^2+4p^2}}$ のとき

すなわち　$a^2+4p^2=-4p(p+b)$　すなわち　$a=\pm 2\sqrt{-p(2p+b)}$　のときに限る。

したがって，L は $a=\pm 2\sqrt{-p(2p+b)}$ において最小値 $4\sqrt{-p(p+b)}$ をとる。　終

@阪大の問題は，$p=\dfrac{1}{4}$，$b=-1$ の場合である。この数値を代入してみると，正しいことも容易に確認できる。ここで，条件 $p>0$ は本質的にあらず。単に C と A の上下関係を決定するためのものである。$p<0$ の場合には，x 軸に関して対称的になるだけである。一方，条件 $b\leqq -2p$ は非常に重要である。このおかげで，求まった a の根号の中身の符号が非負であることが保証される。これに対して $-2p<b<0$ の場合には，$X=\sqrt{a^2+4p^2}$，$A=-4p(p+b)$ とでも置き換えて，関数 $X+\dfrac{A}{X}$ を微分すると，$a=0$ において最小値$-2b$ をとることがわかる。これは図からほぼ自明でもある。かような場合分けは，2008 年東大理科第 4 問に出題されたのを思い出して解答した。非常に懐かしい。東大過去問のリード文表現は悪いことが多いので，次に修正して差し上げた。

2008 年東大理科第 4 問・改

放物線 $y=x^2$ 上に異なる 2 点 P，Q があり，その中点の y 座標を h とする。また，線分 PQ の長さを L，直線 PQ の傾きを m とする。

(1)　h を L，m を用いて表せ。

(2)　L を固定して P，Q を動かすとき，h の最小値を求めよ。

解答 (1)　$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$　$(p\fallingdotseq q)$ とすると

$$m=\frac{p^2-q^2}{p-q}=p+q$$

$$L^2=(p-q)^2+(p^2-q^2)^2=(p-q)^2\{1+(p+q)^2\}$$

よって　$L^2=(p-q)^2(1+m^2)$　← 準備

$1+m^2\fallingdotseq 0$ より　$(p-q)^2=\dfrac{L^2}{1+m^2}$　…… ①

また　$(p+q)^2=m^2$　…… ②

①＋② より　$2(p^2+q^2)=m^2+\dfrac{L^2}{1+m^2}$

したがって　$h=\dfrac{p^2+q^2}{2}=\dfrac{1}{4}\left(m^2+\dfrac{L^2}{1+m^2}\right)$ 答

(2) $1+m^2=t$ とすると，m はすべての実数値をとるから t のとり得る値の範囲は　$t \geqq 1$

(1) より　$h=\dfrac{1}{4}\left(t-1+\dfrac{L^2}{t}\right)$　$(t \geqq 1)$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{L^2}{t^2}\right)=\frac{t^2-L^2}{4t^2}=\frac{(t+L)(t-L)}{4t^2}$$

i) $0<L \leqq 1$ のとき

$t>1$ でつねに $\dfrac{dh}{dt}>0$ であるから，$t \geqq 1$ で h は単調増加である。

よって，$t=1$　すなわち　$m=0$ のとき，h は最小値 $\dfrac{L^2}{4}$ をとる。 答

ii) $L>1$ のとき

$\dfrac{dh}{dt}=0$ とすると　$t=L$

h の増減表は右のようになるから

$t=L$　すなわち　$m=\pm\sqrt{L-1}$

のとき，h は最小値 $\dfrac{1}{4}(2L-1)$ をとる。 答

t	1	$\cdots$	L	$\cdots$
$\dfrac{dh}{dt}$		$-$	0	$+$
h		$\searrow$	$\dfrac{1}{4}(2L-1)$	$\nearrow$

@(2) で，問題文に $L \geqq 1$ という条件があれば，相加平均相乗平均の大小関係で容易に解答できる。文科と一部共通問題にする手もあったものを。この頃の文科は易しい問題も出題され，合否に数学が正しく関与していた。現在の酷いセットとは雲泥の差。なお，極と極線の理論は以下に続く。

極線の方程式から　$2ax=4py+4pb$

これと　$x^2=4py$　から　$x^2-2ax+4pb=0$

解と係数の関係により　$x_1+x_2=2a$　$x_1x_2=4pb$　…… ①

また，極線 PQ：$ax-2py-2pb=0$ の法線ベクトルの 1 つは　$\vec{n}=(a,\ -2p)$ …… ②

である。以上の準備のもとで次の重要な定理を証明しよう。

定理

放物線 C：$x^2=4py$ $(p \neq 0)$ に関して焦点 F$(0,\ p)$ と反対側に点 A$(a,\ b)$ をとる。極 A に対する接点を P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$ とするとき，次の条件はすべて同値である。

Ⅰ　AP⊥AQ

Ⅱ　極 A は準線 $y=-p$ 上にある。

Ⅲ　焦点 F は極線 PQ 上にある。

Ⅳ　PQ⊥AF

証明 点 P，Q における接線の方程式はそれぞれ

$x_1x=2p(y+y_1)$，$x_2x=2p(y+y_2)$

であるから

$\mathrm{I} \iff \dfrac{x_1}{2p}\cdot\dfrac{x_2}{2p}=-1$

$\iff x_1x_2=-4p^2$

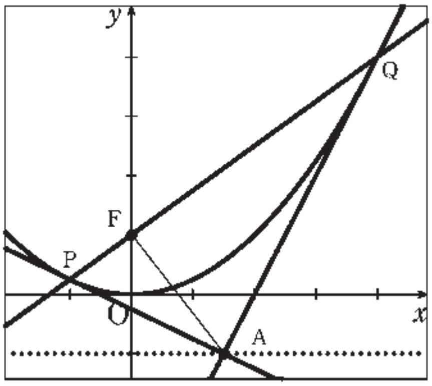
$\iff 4pb=-4p^2$ （∵①より）

$\iff b=-p$ （$\iff \mathrm{II}$）

$\iff \mathrm{PQ}:ax=2p(y-p) \iff \mathrm{III}$

$\mathrm{II} \iff \overrightarrow{\mathrm{FA}}=(a,\ -p-p)$

$\iff \overrightarrow{\mathrm{FA}}=\vec{n} \iff \mathrm{IV}$ （∵②より） 終



@実に鮮やか。極から引いた２本の接線が直交する状況は入試問題等でしばしば登場する。この条件は極線が焦点を通過することや極が準線上にあることと同値になる。楕円や双曲線の場合には，準円上にあることと同値に。これは次の如く，2022年京大文系過去問のスーパー別解に直結する。

2022年京大文系第３問

xy平面上の２直線L_1，L_2は直交し，交点のx座標は$\dfrac{3}{2}$である。また，L_1，L_2はともに曲線$C:y=\dfrac{x^2}{4}$に接している。このとき，L_1，L_2及びCで囲まれる図形の面積を求めよ。

解答 $C:x^2=4y$であるから，準線の方程式は　$y=-1$

前述の定理により，L_1，L_2の交点は$\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2},\ -1\right)$である。極Aに対する極線の方程式は

$\dfrac{3}{2}x=2(y-1)$　　　$y=\dfrac{3}{4}x+1$

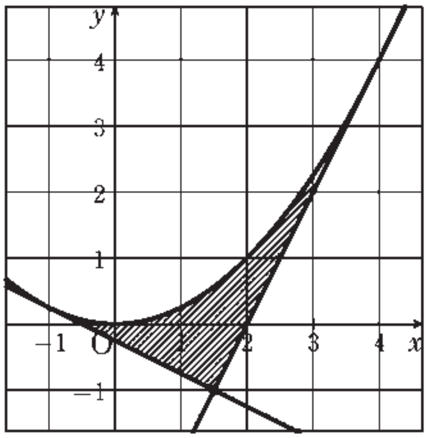
これと$x^2=4y$から　$x^2-3x-4=0$　　$x=-1,\ 4$

図より，求める面積Sは

$$S=\int_{-1}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{4}(x+1)^2dx+\int_{\frac{3}{2}}^{4}\frac{1}{4}(x-4)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{12}(x+1)^3\right]_{-1}^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{1}{12}(x-4)^3\right]_{\frac{3}{2}}^{4}$$

$$=2\cdot\frac{1}{12}\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{48}$$ 答



別解（$x=-1,\ 4$まで同じ）　接点の座標は$\left(-1,\ \dfrac{1}{4}\right)$，$(4,\ 4)$であるから，次のベクトル

$\vec{a}=\left(-1-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{4}-(-1)\right)=\left(-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{4}\right)$　　　$\vec{b}=\left(4-\dfrac{3}{2},\ 4-(-1)\right)=\left(\dfrac{5}{2},\ 5\right)$

を考え，三角形の面積から放物線と極線で囲まれた部分の面積を減ずれば

$$S=\frac{1}{2}\left|-\frac{5}{2}\cdot 5-\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{2}\right|-\int_{-1}^{4}\frac{1}{4}(x+1)(x-4)dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{2}\cdot\frac{5}{4}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot 5^3=\frac{125}{48}$$ 答

接点を求めるだけ余分な計算に。

@なんと，接線の方程式を経ずに接点の x 座標が求まるとは。天下の京大ゆえ，うまく条件を隠しているが，極と極線を知り尽くした受験生であれば，状況は瞬殺。しかし，文系問題ゆえ気づいた受験生は経済学部など理系文転生徒の一部のみかと。ただ，前年の大阪大の過去問を演習していた受験生は気づいたかもしれぬ。かように阪大の過去問を利用できる問題を京大が翌年に出題するとは驚き。阪大に敬意を表明したか，単に道具と利用か。なお，この問題も次の如く一般化可能。

座標平面上の 2 直線 L_1，L_2 は直交し，交点の x 座標は a である。また，L_1，L_2 はともに曲線 $C : x^2=4py$ に接している。このとき，L_1，L_2 および C で囲まれる図形の面積は $\dfrac{(a^2+4p^2)^{\frac{3}{2}}}{6|p|}$

証明 先ほどの解答で，$\dfrac{3}{2}$ を a に替え，極線：$ax=2p(y-p)$ を考えて同様にできる（詳解略）。 終

@京大の問題は $a=\dfrac{3}{2}$，$p=1$ の場合である。この数値を代入してみると，正しいことも容易に確認できる。

では，次に放物線 $C : x^2=4py\ (p\neq 0)$ に関して焦点 $\mathrm{F}(0,\ p)$ と同じ側に点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとったらどうなるか。もちろん接線を引くことは不可能。次の問題を解答してみよう。

問題

放物線 $C : x^2=4py\ (p\neq 0)$ に関して焦点 $\mathrm{F}(0,\ p)$ と同じ側に点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとる。点 A を通る傾き m の直線と曲線 C は必ず 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ で交わる。傾き m の値が変化するとき，点 P，Q における接線の交点 R の軌跡を求めよ。

解答 直線 PQ の方程式は　$y=m(x-a)+b$　　$4py=4pm(x-a)+4pb$

これと　$x^2=4py$　から

$$x^2-4pmx+4p(ma-b)=0$$

解と係数の関係により

$$x_1+x_2=4pm \qquad x_1x_2=4p(ma-b) \quad \cdots\cdots ①$$

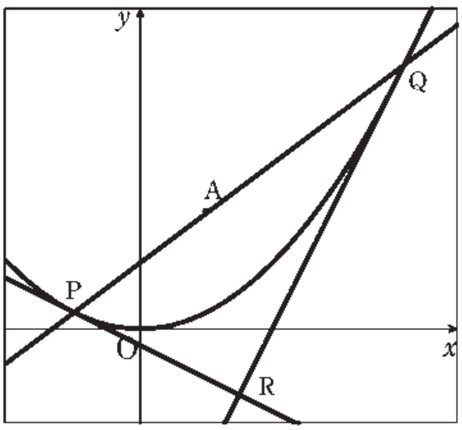
直線 PR の方程式は　$x_1x=2p(y+y_1)$　……②

直線 QR の方程式は　$x_2x=2p(y+y_2)$　……③

②−③ より　$(x_1-x_2)x=2p(y_1-y_2)$

$x_1\neq x_2$，$x_1{}^2=4py_1$，$x_2{}^2=4py_2$　であるから

$$x=\frac{2p(y_1-y_2)}{x_1-x_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x_1{}^2-x_2{}^2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{2}=2pm \qquad (\because ① より)$$



②$\times x_2$−③$\times x_1$ より

$$2px_2(y+y_1)-2px_1(y+y_2)=0$$

$$4p(x_1-x_2)y=4p(x_2y_1-x_1y_2)$$

$x_1\neq x_2$，$x_1{}^2=4py_1$，$x_2{}^2=4py_2$　であるから

$$y=\frac{1}{4p}\cdot\frac{{x_1}^2x_2-x_1{x_2}^2}{x_1-x_2}$$

$$=\frac{x_1x_2}{4p}=ma-b \qquad (\because ① より)$$

よって，点 R の座標は　$(2pm,\ ma-b)$

これは，直線 $ax=2p(y+b)$ 上にある。定数 p に対して，実数 m が実数全体を変化するとき，点 R はこの直線全体を動く。したがって，求める軌跡は，直線 $ax=2p(y+b)$ である。　答

@この点 A を極 (pole)，直線 $ax=2p(y+b)$ を 極 A に対する極線 (polar line) という。普通，軌跡の解答は最後の部分を簡略化して記述するが，敢えて大げさに記述した。これにより，極線上に任意の点 R をとると，そこから放物線に 2 本の接線が引けて，点 R に対する極線も引ける。この極線上に元の点 A があることもわかった。以上をまとめると，次の如し。

Ⅰ　放物線に関して焦点と反対側の点 A に対する極線 ℓ_A 上に点 B(焦点側)をとると，点 B に対する極線 ℓ_B 上に元の点 A は存在する。

Ⅱ　放物線に関して焦点と同じ側の点 A に対する極線 ℓ_A 上に点 B(焦点と反対側)をとると，点 B に対する極線 ℓ_B 上に元の点 A は存在する。

さて，ここで次の疑問が。円の外部の極に対する極線が引けたなら，円の内部の極に対する極線も引けるのではないか。実は，これまでと全く同様な議論で解明可能。詳細は読者諸賢でご検討を。ただし，本来は円：$x^2+y^2=r^2$ と内部の点 $A(a,\ b)$ について計算するが，円は回転しても同じ円ゆえ，円：$x^2+y^2=r^2$ と内部の点 $A(0,\ a)$ について検証すればよい。かように計算を簡略化するのも日常の智恵。ただし，$0<a<r$ にしておく。ここで，$a=0$ の場合には，2 本の接線がつねに平行になり，その交点は存在しない (無限遠にある) ので除外した。円の内部の点の極線を考えるとは意外。入試問題の素材になってもおかしくないが，この題材は見当たらない。なお，先般の如く放物線に拡張する際に，放物線の焦点側を放物線の内部，焦点と反対側を放物線の外部と呼ぶこともある。

3 2 本の接線のなす角の一般化

ここまでの議論の多くは，2 本の接線が直交するという特殊な設定であった。では，接線のなす角の一般化を考えてみよう。まず，次の 2003 年九州大学過去問を解いてみよう。

問題

θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である定数とする。座標平面上で，$a^2>4b$ を満たす点 $P(a,\ b)$ から放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に引いた 2 つの接線の接点を Q，R とし，接線 PQ，PR の傾きをそれぞれ m_1，m_2 とおく。点 P は $\angle QPR=\theta$ を満たしている。点 P の全体が作る図形を G とする。

(1)　$m_1<0<m_2$ のとき，$\tan\theta$ を m_1 と m_2 で表せ。

(2)　G を数式で表せ。

(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，G を図示せよ。

解答 (1)　直線 PQ，PR と x 軸とのなす角をそれぞれ α，β とおくと

$$\tan\alpha=m_1,\ \tan\beta=m_2,\ \theta=\alpha-\beta$$

よって　　$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$　答

(2)　点 P$(a,\ b)$ を通る直線は $y=m(x-a)+b$ とおける。

これが放物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ と接するので，$x^2-4mx+4am-4b=0$ において

判別式 $\frac{D}{4}=4m^2-4am+4b$ は 0 である。よって　　$m^2-am+b=0$

条件 $a^2>4b$ から，この m の方程式は 2 つの実数解をもち，$m=m_1,\ m_2$ である。

解と係数の関係により　　$m_1+m_2=a,\ m_1m_2=b$

$$m_1-m_2=-\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}=-\sqrt{a^2-4b}\quad(\because m_1<m_2)$$

よって，(1) から　$\tan\theta=-\frac{\sqrt{a^2-4b}}{1+b}$

したがって，Gの方程式は　$\frac{\sqrt{x^2-4y}}{1+y}=-\tan\theta$　答

(3)　$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき，(2) から　$\frac{\sqrt{x^2-4y}}{1+y}=-1$ ……①

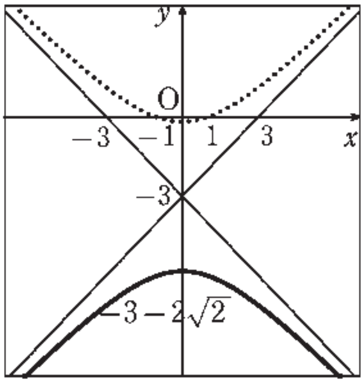
よって　　$1+y<0$

① の両辺は負であるから 2 乗して　　$x^2-4y=y^2+2y+1$

$$x^2-(y+3)^2=-8$$

よって　$\frac{x^2}{8}-\frac{(y+3)^2}{8}=-1$　$(y<-1)$　したがって，Gは

右図のようになる。　答



@直交条件の角度が変わっただけで，かように問題が難しく変身する。なお，解答図の破線の曲線は，$\theta=\frac{3\pi}{4}$ の場合。補角になると双曲線の片割れに。直交条件の解除は大学入試問題にも散見される。直交する場合に比べ，難易度は遙かに上昇。両辺負を断ったあとで 2 乗する式変形は平素あまりしないので，やや厳しい。なお，これを一般化すると，次の如く非常に格好よき定理となる。

定理

放物線 $C: x^2=4py\ (p>0)$ に関して焦点 F$(0,\ p)$ と反対側に点 P$(a,\ b)$ をとると，点 P から放物線 C に 2 本の接線 PQ，PR を引くことができる。点 P が $\angle\mathrm{QPR}=\theta\ (0<\theta<\pi,\ \theta\neq\frac{\pi}{2})$ を満たして動くとき，点 P の軌跡は焦点 F，準線：$y=-p$，離心率 $\frac{1}{|\cos\theta|}$ の双曲線の片方である。

証明 接点 Q の x 座標が接点 R の x 座標より小さいとし，接線 PQ，PR の傾きをそれぞれ m_1，m_2 とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ と x 軸とのなす角をそれぞれ α，β とおくと　← ベクトル表示に

$$\tan\alpha=m_1,\ \tan\beta=m_2,\ \theta=\alpha-\beta,\ m_1<m_2$$

よって　　$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

点 P$(a,\ b)$ を通る直線は　$y=m(x-a)+b$　すなわち　$4py=4pmx-4pam+4pb$　とおけて，y を消去すると，放物線 C と接することから

2 次方程式 $x^2-4pmx+4pam-4pb=0$ の判別式 $\dfrac{D}{4}=4p^2m^2-4pam+4pb$ は 0 である。

$p \fallingdotseq 0$ より　　$pm^2-am+b=0$

点 P は C より下方にあるから　　$a^2>4pb$

よって，この m の方程式は 2 つの実数解をもち，$m=m_1$，m_2 である。

解と係数の関係により　　$m_1+m_2=\dfrac{a}{p}$，$m_1m_2=\dfrac{b}{p}$

$$m_1-m_2=-\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}$$

$$=-\sqrt{\frac{a^2}{p^2}-\frac{4b}{p}}=-\frac{\sqrt{a^2-4pb}}{p}\qquad (\because m_1<m_2,\ p>0 \text{ より})$$

よって　　$\tan\theta=-\dfrac{\sqrt{a^2-4pb}}{p}\div\dfrac{p+b}{p}$

$$=-\frac{\sqrt{a^2-4pb}}{p+b}\ \cdots\cdots ①$$

ここで　　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　① の両辺は正であるから　$p+b<0$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき　① の両辺は負であるから　$p+b>0$

① の両辺の符号が確定しているので 2 乗して　　$\tan^2\theta=\dfrac{a^2-4pb}{(p+b)^2}\ \cdots\cdots ②$　← 2 乗は可！

点 P と準線：$y=-p$ の距離は　$d=|b-(-p)|$　であるから，離心率 e は　　$e=\dfrac{\mathrm{PF}}{d}$

② より　　$e^2=\dfrac{a^2+(b-p)^2}{(p+b)^2}$

$$=1+\frac{a^2-4pb}{(p+b)^2}$$

$$=1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

変形はすべて同値変形であるから，逆も成り立つ。また，θ と $\dfrac{\pi}{2}$ の大小により，$p+b$ の符号が決まるので，双曲線のうち片方のみになる。

以上から，求める軌跡は，焦点 F，準線：$y=-p$，離心率 $\dfrac{1}{|\cos\theta|}$ の双曲線の片方である。　終

@条件 $p>0$ は本質的ではない。単に判別式の符号を決定し，根号の中身の符号が正であることを保証するためのものである。$p<0$ の場合には，x 軸に関して対称的になるだけである。

さて，ここで欲張りな疑問が。楕円，双曲線なら如何に。残念ながら，円：$x^2+y^2=r^2$ しか答えが簡単にならない。円ならば図をかけば，先ほどと全く同じ設定で △OPQ に着目すると

$\mathrm{OP}=\dfrac{r}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$　であるから，求める軌跡は 円：$x^2+y^2=\dfrac{2r^2}{1-\cos\theta}$ となることがすぐにわかる。しかし，楕円，双曲線の場合には一応答えは求まるが，2 次曲線にはならぬ。複雑怪奇な 4 次式に。式が美しくなく，愚鈍な筆者では解明不可能。

4 おわりに

実は本論文のきっかけは，岡山白陵高等学校に永年勤務されている三木雅弘先生のご教示により，昨年やっと気づいたもの。当初は論文にまとめる気はなかった。軽い気持ちでネットで検索してみると，旧友でもあり尊敬申し上げている灘高の岡多賀彦先生が遥か昔に $y=x^2$ の極と極線について論文を書かれていた(参考文献[1])。研究仲間というのは実に有り難し。この名作と被りのなきよう 2 次曲線版で思考を重ねるうちに，どんどん深みにはまり込んでかような作品が完成した次第。

本論文完成後，本校最高の教え子で『高校数学の美しい物語』を主宰するマスオ君に送付したところ，すぐ HP に反映してくれた(被参考文献[3])。本論文を深めていく過程で感じたことは，共通テスト数学 C 分野範囲に曲線と複素数平面が入ってしまったことへの心配である。そもそもこれらで 1 分野とは広すぎて，文系受験生は選択不能。高校現場でも文系生徒にこれらの分野を教えるとは思えぬ。ということは，すでにこの時点で文理不公平。入試に公平性が担保できぬのはいかがなものか。単位数と比例配点の原則から大胆に予想すると，共通テスト数学Ⅱ·B·C の大問構成は

第 1 問	三角関数と指数・対数関数	30 点	各 15 点
第 2 問	微積分	25 点	ここまで必答問題
第 3 問	数列	15 点	
第 4 問	統計	15 点	
第 5 問	ベクトル	15 点	
第 6 問	曲線と複素数平面	15 点	曲線か複素数平面のどちらかに限定出題

第 3 問～第 6 問より 3 問選択　　この予想は 2022 年 8 月現在

果たして如何に。選択問題の配点 15点 は出題上きつい。猫の目の如く変化することも予想される。なお，complex plane の正しい日本語訳は複素平面。巷では複素数平面の訳が恣意的に流行させられているが，どこにも number などない。筆者はかような間違ったことを教えるほど寛大にあらず。授業などでは「実は複素平面」と注釈している。天下の京大入試問題の多くは複素平面の表現に。一方東大はさにあらず。両者の立場の違いや真理の追求に対する心構えの違いが鮮明に。

ご紹介した一般化などの考察は，大部分が休日遠距離ロードや県内外の山の頂や尾根などで考えたもの。この中には，校歌に登場する標高が平方数の頂も含まれる。海外からの修行僧が多く集う寺への縦走路途上で，思考に没頭するあまり道を間違えることも多し。私もまだまだ発展途上人。枕を濡らして眠れぬ夜を過ごすこともしばしば。学びを深めるほど，知らぬことが増える底なし沼状態に。真理という大海原の傍らで砂遊びに戯れる孤独な幼児が如し。昔から群れを嫌い，権威と束縛を嫌い，叩きあげのスキルと周囲の方々のご理解のもとでこれまで何とか生きて参りました。これからも自分なりの進化を続けて参ります。教師たるもの，生涯求道者。収束などいたしません。最後になりましたが，発表の機会をくださった編集委員の先生方，そして拙作を最後までお読みくださった読者の皆様，ありがとうございました。

参考文献

[1]　岡　多賀彦　「放物線 $y=x^2$ の極·極線」(『数研通信　第 7 号』)　1985 年　数研出版
[2]　山川　宏史　フォーカスゴールド数学 B+C 5th Edition (共著) の実戦編　啓林館

被参考文献

[3]　マスオ　『高校数学の美しい物語』SB Creative の web 版