About Chebyshev polynomials

山　川　宏　史

岡山朝日研究紀要 第45号（2024年３月）抜刷
〒703-8278 岡山市中区古京町2-2-21

About Chebyshev polynomials

山　川　宏　史

1 はじめに

難関大学の入試問題にチェビシェフ多項式が素材になることが頻繁にある。例えば，昨年の京大理系第 6 問に出題されたことは記憶に新しい。今回機会を与えられたので，長年にわたる現場指導における極秘の奥義などを一挙大公開することにした。知っていれば現場での指導や大学入試にお得ゆえ，幅広い読者を想定し高校 3 年生でも読むことができるよう，途中計算等詳細に記述した。

2 第 1 種チェビシェフ多項式について

定義 次で定まる式 $T_n(x)$ を Chebyshev polynomials of the first kind という。

$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ （n は自然数）

例 $T_1(\cos\theta)=\cos 1\theta$　ゆえ　$T_1(x)=x$　（形式的に　$T_0(\cos\theta)=\cos 0\theta$　ゆえ　$T_0(x)=1$）

$T_2(\cos\theta)=\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$　ゆえ　$T_2(x)=2x^2-1$

$T_3(\cos\theta)=\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$　ゆえ　$T_3(x)=4x^3-3x$

実は漸化式が存在し，2 段階帰納法によりすべて整数係数の整式になることが証明できる。また，一般項を求めることも可能。発見者である Pafnuty Chebyshev（1821～1894：Russia）のラテン文字表記に Tschebyscheff があるので，記号に T を用いている。なお，これが関数と記されたら x の定義域は $-1\leqq x\leqq 1$ に限定されるが，多くの文献には多項式と記されているからか全く触れられない。では，$x<-1$，$1<x$ の場合には如何に解釈できるかは本論文で後述ゆえ，どうぞお楽しみに。まずは，次の 2017 年早稲田大学過去問を解いてみよう。

問題 n を正の整数とする。次の条件 (*) を満たす x についての n 次式 $P_n(x)$ を考える。

(*)　すべての実数 θ に対して，$\cos n\theta=P_n(\cos\theta)$

(1) $n\geqq 2$ のとき，$P_{n+1}(x)$ を $P_n(x)$ と $P_{n-1}(x)$ を用いて表せ。

(2) $P_n(x)$ の x^n の係数を求めよ。

(3) $\cos\theta=\dfrac{1}{10}$ とする。$10^{1000}\cos^2(500\theta)$ を 10 進法で表したときの，一の位の数字を求めよ。

解答 (1) $\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos n\theta\cos\theta$

であるから　　$\cos(n+1)\theta=2\cos\theta\cos n\theta-\cos(n-1)\theta$

よって　　$P_{n+1}(x)=2xP_n(x)-P_{n-1}(x)$　$(n\geqq 2)$ ……①　答

(2) 前述の如く　　$P_1(x)=x$　　$P_2(x)=2x^2-1$

① により，$P_n(x)$ は帰納的に整数係数の n 次式である。　← 簡易版帰納法で軽くあしらう

$P_n(x)$ の最高次の係数を a_n とすると　　$a_1=1$，$a_2=2$

① において，最高次の項の係数を比較すると　　$a_{n+1}=2a_n$ $(n\geqq 2)$

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列になり　　$a_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$ $(n\geqq 2)$

これは，$n=1$ のときも成り立つ。したがって　　$a_n=2^{n-1}$　答

(3) (2) から　$P_n(x)=2^{n-1}x^n+Q_{n-1}(x)$　($Q_{n-1}(x)$ は $n-1$ 次以下の整式)　と表される。

$$10^{1000}\cos^2(500\theta)=\{10^{500}P_{500}(\cos\theta)\}^2=\left\{10^{500}P_{500}\left(\frac{1}{10}\right)\right\}^2$$

また　$10^{500}P_{500}\left(\frac{1}{10}\right)=10^{500}\left\{2^{499}\left(\frac{1}{10}\right)^{500}+Q_{499}\left(\frac{1}{10}\right)\right\}=2^{499}+10N$　(N は整数)

とおけるので　$10^{1000}\cos^2(500\theta)=(2^{499}+10N)^2=2^{998}+10N'$　(N' は整数)

よって，$10^{1000}\cos^2(500\theta)$ の一の位の数字は，2^{998} の一の位の数字に等しい。

$$2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8,\ 2^4=16,\ 2^5=32,\ \cdots\cdots$$

であるから，2 の累乗の一の位は，2，4，6，8 を繰り返す。

$998=4\cdot249+2$ であるから，2^{998} の一の位の数字は　4

したがって，$10^{1000}\cos^2(500\theta)$ の一の位の数字は　4　答

@ 安全のためか，問題文に n 次式 (したがって整式) と宣言してくれている。が，さすがは早稲田，$P_1(x)$，$P_2(x)$ などの練習はない。問題文に露骨に定義式が与えられているが，(1) の漸化式ができなければ零点。示すべき漸化式が問題文に書かれていないので，証明の最初が厳し。実は，次の如く真正面から求めることができる。これは赤本など世に出た多くの文献には記載されていない。

(1) の別解

$$\begin{aligned}P_{n+1}(\cos\theta)&=\cos(n+1)\theta\\&=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta\\&=\cos n\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\{\cos(n+1)\theta-\cos(n-1)\theta\}\\&=P_n(\cos\theta)\cos\theta+\frac{1}{2}\{P_{n+1}(\cos\theta)-P_{n-1}(\cos\theta)\}\end{aligned}$$

両辺を 2 倍して移項すれば　$P_{n+1}(x)=2xP_n(x)-P_{n-1}(x)$　$(n\geqq2)$　答

@ これなら，試験会場でも即興でできる。また，昨年の京大理系第 6 問では次の如く出題された。(2) はこの基礎知識がなければ，困難。さすがは京大，よくぞ入試本番にノーヒントで出題した。せめて漸化式を小問で。バランスが悪いか。が，せっかくの出題も弁別度は皆無であったか。

問題 p を 3 以上の素数とする。また，θ を実数とする。

(1) $\cos3\theta$ と $\cos4\theta$ を $\cos\theta$ の式として表せ。

(2) $\cos\theta=\dfrac{1}{p}$ のとき，$\theta=\dfrac{m}{n}\cdot\pi$ となるような正の整数 m，n が存在するか否かを理由を付けて判定せよ。

解答 (1) $\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$　$\cos4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$　(簡単ゆえ，詳細略)　答

(2) もし，$\cos\theta=\dfrac{1}{p}$ かつ $\theta=\dfrac{m}{n}\cdot\pi$ となるような正の整数 m，n が存在したと仮定する。

$$\cos n\theta=\cos m\pi=(-1)^m$$

ここで，多項式 $T_n(x)$ を考えると前述のことから

$$(-1)^m=\cos n\theta=2^{n-1}\left(\frac{1}{p}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1}+a_{n-2}\left(\frac{1}{p}\right)^{n-2}+\cdots\cdots+a_0\quad\cdots\cdots①$$

となるような整数係数 a_i ($i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$) が存在する。

分母を払って移項すると

$$2^{n-1}=-a_{n-1}p-a_{n-2}p^2-\cdots\cdots-a_0p^n+(-1)^m p^n$$

$$=p\{-a_{n-1}-a_{n-2}p-\cdots\cdots-a_0p^{n-1}+(-1)^m p^{n-1}\}\quad\cdots\cdots②$$

右辺は p と整数の積ゆえ，3 以上の素数 p が 2^{n-1} の約数になり，これは矛盾。

よって，かような正の整数 m，n は存在しない。 答

@ この解答は，第 1 種チェビシェフ多項式の性質を用いたおかげで非常に短い。試験会場では，漸化式を自分で導いて，整数係数や最高次の係数についても記述しないと大減点は必至。事前知識があっても記述が煩雑。実は，昨年 2 月の超難関大学直前講座で本校 3 年生･補習科生に知恵を授けておいたのだが，記述できなかったと嘆いていた。知っていてもかような状況。なお，本問の

$\dfrac{1}{p}$ は $\dfrac{k}{hp}$ （k と p は互いに素，h は整数）

に一般化できることは，①，② 式と同様な式をつくれば以下の通り。

証明 上記の証明と同様にして

$$2^{n-1}\left(\frac{k}{hp}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{k}{hp}\right)^{n-1}+a_{n-2}\left(\frac{k}{hp}\right)^{n-2}+\cdots\cdots+a_0=(-1)^m$$

となるような整数係数 a_i（$i=0$，1，2，……，$n-1$）が存在する。

分母を払って移項すると

$$2^{n-1}k^n=-a_{n-1}k^{n-1}hp-a_{n-2}k^{n-2}h^2p^2-\cdots\cdots-a_0h^np^n+(-1)^m h^np^n$$

$$=p\{-a_{n-1}k^{n-1}h-a_{n-2}k^{n-2}h^2p-\cdots\cdots-a_0h^np^{n-1}+(-1)^m h^np^{n-1}\}$$

右辺は p と整数の積ゆえ，3 以上の素数 p が $2^{n-1}k^n$ の約数になり，これは矛盾。

よって，かような正の整数 m，n は存在しない。 終

@ 実は，前世紀 1996 年に京大後期文系でも第 1 種チェビシェフ多項式は次の如く出題された。

(1) は $T_5(x)$ のことで，式変形を 1 回でも経験したことのある受験生はかなり有利であったかと。

やはり，平素から生徒にいろんな式変形の実地訓練をさせておくことは重要。

問題 (1) $\cos 5\theta=f(\cos\theta)$ を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

(2) $\alpha=18^\circ$ とするとき，$\cos\alpha\cos 3\alpha\cos 7\alpha\cos 9\alpha=\dfrac{5}{16}$ を示せ。

解答 (1) $\cos 5\theta=\cos 4\theta\cos\theta-\sin 4\theta\sin\theta$

$$=\cos\theta(2\cos^2 2\theta-1)-2\sin\theta\sin 2\theta\cos 2\theta$$

$$=\cos\theta\{2(2\cos^2\theta-1)^2-1-4(1-\cos^2\theta)(2\cos^2\theta-1)\}$$

ここで，$\cos\theta=x$ とおくと

$$f(x)=x\{2(2x^2-1)^2-1-4(1-x^2)(2x^2-1)\}$$

$$=16x^5-20x^3+5x$$ 答

(2) $\theta=\alpha$，3α，5α，7α，9α は $\cos 5\theta=0$ の $0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ でのすべての解であるから，

$x=\cos\alpha$，$\cos 3\alpha$，0，$\cos 7\alpha$，$\cos 9\alpha$ は $f(x)=0$ の相異なる解すべてである。

$16x^4-20x^2+5=0$ の相異なる 4 つの解が $\cos\alpha$，$\cos 3\alpha$，$\cos 7\alpha$，$\cos 9\alpha$ であるから，

解と係数の関係により $\cos\alpha\cos 3\alpha\cos 7\alpha\cos 9\alpha=\dfrac{5}{16}$ 答

＠(1) が定義そのもの。(2) は方程式の解についての設問で，最後は厳し。なお，(1) を用いなくても，次の如く一発解答可能。ただし，$\cos 36^\circ=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$，$\cos 72^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ は常識。

(2) の別解

$$\cos\alpha\cos 3\alpha\cos 7\alpha\cos 9\alpha=\cos\alpha\cos 3\alpha\cos(180^\circ-3\alpha)\cos(180^\circ-\alpha)$$
$$=\cos^2\alpha\cos^2 3\alpha$$

ここで　$\cos 2\alpha=\cos 36^\circ=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$，$\cos 4\alpha=\cos 72^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　であるから

$$\cos\alpha\cos 3\alpha=\frac{1}{2}(\cos 4\alpha+\cos 2\alpha)=\frac{\sqrt{5}}{4}$$

よって　$\cos\alpha\cos 3\alpha\cos 7\alpha\cos 9\alpha=\dfrac{5}{16}$　答

＠(2) の前半を一般化すると，第 1 種チェビシェフ多項式の零点が定義により次のようになる。

参考 方程式 $T_n(x)=0$ の解は　$x=\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi$　$(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$

証明 $\cos n\theta=0$ より　$n\theta=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$　よって　$\theta=\dfrac{2k-1}{2n}\pi$　終

次に一般項を求めてみよう。変数 x を単なる文字と思うと，隣接 3 項間漸化式で処理可能。

問題 $T_n(x)$ を求めよ。

解答 簡単のため，$T_n(x)=a_n$ とおく $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$　← $n=0$ からにするのがお得

漸化式は　$a_{n+1}-2xa_n+a_{n-1}=0$　$(n\geqq 1)$

特性方程式の 2 解は　$\alpha=x-\sqrt{x^2-1}$，$\beta=x+\sqrt{x^2-1}$

であるから，漸化式は　$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})$

と変形できる。

$$a_1-\alpha a_0=T_1(x)-\alpha T_0(x)=x-\alpha=\sqrt{x^2-1}$$

であるから，等比数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ の一般項は

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^n\sqrt{x^2-1}\ \cdots\cdots ①$$

また　$a_1-\beta a_0=T_1(x)-\beta T_0(x)=x-\beta=-\sqrt{x^2-1}$

であるから，α と β の役割を入れ替えると　← この表現が品格あり

$$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^n(-\sqrt{x^2-1})\ \cdots\cdots ②$$

①−② より　$(\beta-\alpha)a_n=\beta^n\sqrt{x^2-1}+\alpha^n\sqrt{x^2-1}$

- $\alpha\neq\beta$ のとき，すなわち $x\neq\pm 1$ のとき　← この場合分けは必須

$$a_n=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\beta-\alpha}(\beta^n+\alpha^n)=\frac{1}{2}\{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n\}\ \cdots\cdots ③$$

- $x=1$　のとき　$\theta=2k\pi$ であるから　$T_n(1)=\cos 2nk\pi=1$
- $x=-1$ のとき　$\theta=(2k-1)\pi$ であるから　$T_n(-1)=\cos n(2k-1)\pi=-1$

　となり，③ は成り立つ。よって

$$T_n(x)=\frac{1}{2}\{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n\}$$　答

＠隣接３項間漸化式の解法そのものに。重解か否かでの場合分けは必須。注意点は，特性方程式の解は重解または虚数解ということである。答えに根号が入ったが，実はその中身は０以下である。すべて整数係数であるのに根号が入るのは，Fibonacci sequence と同様。しかも虚数まで入るのは気持ち悪い。しかし，実際に $n=1,\ 2,\ 3$ などを代入してみると正しいことがわかる。さらに，次の如く暗算レベルのスーパー別解も可能。

別解 de Moivre's formula により

$$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos n\theta+i\sin n\theta+\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)\}$$ ← この変形がポイント

$$=\frac{1}{2}\{(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta-i\sin\theta)^n\}$$

$x=\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおくと，$\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$ であるから

$$T_n(x)=\frac{1}{2}\{(x+i\sqrt{1-x^2})^n+(x-i\sqrt{1-x^2})^n\}\quad\cdots\cdots ①$$

$$=\frac{1}{2}\{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n\}\quad\cdots\cdots ②$$ 答

＠ $0\leqq\theta\leqq\pi$ の設定により，$\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$ に $\pm$ がつかないのが嬉しい。さらなる別解には，

Euler's formula　$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$　を用いるとよい。

ここで　$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$　より　$\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

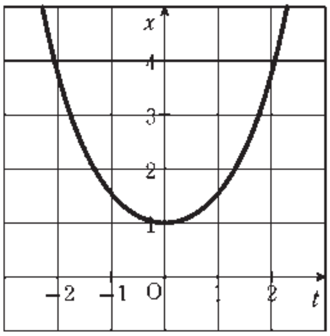
別解 $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$

$$=\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$$ ← 実は cos の別定義にすぎぬ。上の別解よりも自然な変形か。

$$=\frac{1}{2}\{(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta-i\sin\theta)^n\}$$

以下，上の解答と同じ。　答

ところで，$x=\cos\theta$ とおいたから，定義域は $-1\leqq x\leqq 1$ 。② の式表示は根号の中身が０以下になってしまう。それなら，① の表示の方が気持ち悪くないかもしれぬ。では，お約束のこの範囲以外の x に対してはどうなるか計算してみよう。まず，根号を解消する準備をしておく。



関数 $x=\dfrac{1}{2}(e^t+e^{-t})$ のグラフを考えると，$x\geqq 1$ に対して

$$x=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\quad(t\geqq 0)$$

を満たす実数 t がただ１つだけ存在する。

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{4}(e^{2t}+2+e^{-2t})-1}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}(e^{2t}-2+e^{-2t})}=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\quad(\because t\geqq 0)$$

ここで，$\dfrac{1}{2}(e^t+e^{-t})=\cosh t$，$\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t})=\sinh t$　とおくと

（この関数をそれぞれ hyperbolic cosine，hyperbolic sine：双曲線余弦，正弦 という）

$\cosh t+\sinh t=e^t$，$\cosh t-\sinh t=e^{-t}$，$x=\cosh t$，$\sqrt{x^2-1}=\sinh t$　であるから

最初の式　　　　　　　　　$e^t=\cosh t+\sinh t$　は

　Euler's formula　$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

とちょうど対になっている。

実は de Moivre's formula　$(\cosh t+\sinh t)^n=\cosh nt+\sinh nt$ も成り立つ。証明は帰納法なら，n：自然数限定で可能。これを別の変形で

$$(\cosh t+\sinh t)^n=\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}+\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^n$$
$$=e^{nt}$$
$$=\frac{e^{nt}+e^{-nt}}{2}+\frac{e^{nt}-e^{-nt}}{2}$$
$$=\cosh nt+\sinh nt$$

と証明すれば，n は複素数全体に拡張できる。これを用いると，次の式変形が可能。

$$T_n(x)=\cosh nt$$
$$=\frac{1}{2}(e^{nt}+e^{-nt})$$
$$=\frac{1}{2}\{(\cosh t+\sinh t)^n+(\cosh t-\sinh t)^n\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n\}$$

よって　　$x\geqq 1$ のとき　$T_n(\cosh t)=\cosh nt$

$x\leqq -1$ のときは，$x=-\cosh t$ $(t\geqq 0)$ とおくことができる。さらに

$$\cosh nt=\frac{1}{2}(e^{nt}+e^{-nt})$$
$$=\frac{1}{2}\{(\cosh t+\sinh t)^n+(\cosh t-\sinh t)^n\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(-x+\sqrt{x^2-1})^n+(-x-\sqrt{x^2-1})^n\}$$
$$=\frac{(-1)^n}{2}\{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n\}$$

となるので　　$T_n(-\cosh t)=(-1)^n\cosh nt$

以上をまとめて，初めて次の如く関数としての $T_n(x)$ が定義されるわけである。

- $T_n(-\cosh t)=(-1)^n\cosh nt$　　$(x\leqq -1)$
- $T_n(\cos t)=\cos nt$　　$(-1\leqq x\leqq 1)$
- $T_n(\cosh t)=\cosh nt$　　$(1\leqq x)$

ここで利用価値が高いと判明した事実は

　$\sqrt{1-x^2}$ の解消には　$x=\cos\theta$　（または　$x=\sin\theta$）

　$\sqrt{x^2-1}$ の解消には　$x=\cosh t$

が有効ということである。形式に因んで，前者を円関数，後者を双曲線関数という。同様に

　$\sqrt{x^2+1}$ の解消には　$x=\sinh t$

が有効。

これを用いると，数学IIIの積分計算に絶大な威力を発揮するので，高度な授業で(補習科や予備校はもちろん，3 年生授業でも) これは使える。実は，コロナ禍以前には県外での先生向けの講習会で頻繁に紹介していた。どこの地域でも大好評であった。なお，n が奇数のときには $T_n(x)$ は奇関数，n が偶数のときには $T_n(x)$ は偶関数になる。漸化式と帰納法で証明できるので，どうぞ読者諸賢でお試しあれ。

オマケコーナー その 1

問題 $\cos 1^\circ$，$\sin 1^\circ$ は有理数か。

解答 もし $\cos 1^\circ$ が有理数であると仮定すると，$T_{30}(\cos 1^\circ)$ は $\cos 1^\circ$ の整数係数多項式であるから $T_{30}(\cos 1^\circ)$ は有理数である。ところが

$$T_{30}(\cos 1^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

は無理数であるから矛盾。したがって，$\cos 1^\circ$ は有理数ではない。

次に，もし $\sin 1^\circ$ が有理数であると仮定すると，$\cos 89^\circ (=\sin 1^\circ)$ も有理数である。ところが

$$\begin{aligned}\cos 30\cdot 89^\circ &= \cos 30(90^\circ-1^\circ)\\ &=\cos(2700^\circ-30^\circ)\\ &=\cos 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

は無理数であるから矛盾。したがって，$\sin 1^\circ$ は有理数ではない。 図

@ なんと簡単。かような使い道もある。どこぞの大学がこのネタを使うかどうか果たして如何に。もちろん，2006 年京大後期理系過去問「$\tan 1^\circ$ は有理数か」を改題した。この問題は最後の後期日程第 6 問に出題された。多くの受験生は敬遠したと思われるが，実は超お買い得問題。tan ゆえ，加法定理が tan のみで表されるから構造が単純。それに比べ，cos，sin は加法定理が自分自身だけでは表されない点が厳しい。なお，次の如く知識不要のスーパー別解も可能。

別解 もし $\cos 1^\circ$ が有理数であると仮定すると，3 倍角の公式を繰り返し用いて

$$\cos 3^\circ,\ \cos 9^\circ(=\sin 81^\circ),\ \cos 27^\circ,\ \cos 81^\circ(=\sin 9^\circ)$$

も有理数である。ところが

$$\begin{aligned}\cos 72^\circ &= \cos(81^\circ-9^\circ)\\ &=\cos 81^\circ\cos 9^\circ+\sin 81^\circ\sin 9^\circ \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

であるから，$\cos 72^\circ$ も有理数になる。一方，$\cos 72^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ であるから，これは矛盾。 図

@ 実は，① は $\sin 1^\circ$ の証明にもそのまま使える便利な式。次の変形も有効。

$$\cos 81^\circ\cos 9^\circ=\frac{1}{2}(\cos 90^\circ+\cos 72^\circ)$$

$$\sin 81^\circ\sin 9^\circ=-\frac{1}{2}(\cos 90^\circ-\cos 72^\circ)$$

読者諸賢はおわかりの如く，$81^\circ+9^\circ=90^\circ$ の余角関係が絶妙。このほかの角度の組も見つかる。数年前，補習科でクイズとして出題したら，多くの生徒が競って別の角度の組を列挙してくれた。彼らの多くは東大理科 2 類を受験，そのうち大多数が合格したのは懐かしい思い出。また，次の如く漸化式から三角関数級数の和が求まるという大技も可能。

オマケコーナー その2

問題 $A=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ を求めよ。

解答 漸化式により　$\cos(k+1)x=2\cos kx\cos x-\cos(k-1)x \quad (k\geqq 1)$

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ を代入して和をとると

$$\sum_{k=2}^{n+1}\cos kx=2\cos x\sum_{k=1}^{n}\cos kx-\sum_{k=0}^{n-1}\cos kx \qquad \leftarrow \cos x \text{ を括り出した。}$$

$$\cos(n+1)x-\cos x+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=2\cos x\sum_{k=1}^{n}\cos kx+\cos nx-1-\sum_{k=1}^{n}\cos kx$$

$$\cos(n+1)x-\cos x+A=2A\cos x+\cos nx-1-A \qquad \leftarrow A \text{ で表した。}$$

$$2(1-\cos x)A=\cos nx-\cos(n+1)x+\cos x-1$$

$$4A\sin^2\frac{x}{2}=2\sin\frac{2n+1}{2}x\sin\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}$$

・$x=2m\pi$　(m は整数) のとき　$A=n$

・$x\neq 2m\pi$　(m は整数) のとき　$\sin\frac{x}{2}\neq 0$ であるから

$$2A\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{x}{2}$$

$$A=\frac{2\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

以上から　$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\begin{cases}\dfrac{\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} & (x\neq 2m\pi,\ m \text{ は整数}) \\ n & (x=2m\pi,\ m \text{ は整数})\end{cases}$$ 答

@ 漸化式からうまく A をつくると，かように見事に解ける。両辺を $\sin\frac{x}{2}$ で割る必要があるので，場合分けが発生するのは必定。

3 第2種チェビシェフ多項式について

定義 次で定まる式 $U_n(x)$ を Chebyshev polynomials of the second kind という。

$$U_{n-1}(\cos\theta)=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \quad (\theta\neq k\pi,\ n \text{ は自然数},\ k \text{ は整数})$$

これが関数と記されたら x の定義域は $-1<x<1$ に限定されるが，多くの文献には多項式と記されているからか全く触れられない。では，$x\leqq -1$，$1\leqq x$ の場合には如何に解釈できるかは本論文で後述ゆえ，どうぞお楽しみに。なお，$U_n(\cos\theta)=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ で定義することもある。一見このほうが両辺の n がそろって美しく見えるが，次数がミスマッチになる。記号に U を用いている理由は，第1種 T の次であるからか。なお，sin，cos がともに登場するので，第1種よりも高級品。

例 $U_0(\cos\theta)=\dfrac{\sin 1\theta}{\sin\theta}=1$ ゆえ $U_0(x)=1$

$U_1(\cos\theta)=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$ ゆえ $U_1(x)=2x$

$U_2(\cos\theta)=\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}=-4\sin^2\theta+3=4\cos^2\theta-1$ ゆえ $U_2(x)=4x^2-1$

$U_3(\cos\theta)=\dfrac{\sin 4\theta}{\sin\theta}=4\cos\theta\cos 2\theta=4(2\cos^3\theta-\cos\theta)$ ゆえ $U_3(x)=8x^3-4x$

分子の $\sin n\theta$ と分母の $\sin\theta$ がうまく約分できる。実は漸化式が存在し，2段階帰納法によりすべて整数係数の整式になることが証明できる。また，一般項を求めることも可能。まずは，次の2020年上智大学過去問を解いてみよう。なお，原題の穴うめ形式を記述式に改題している。かように私立大学の入試問題は穴うめ式が大量に出題されることが頻繁にある。私立大学に本気で合格するには，志望校数年間分の過去問で問題の難易と量を確認しておくべきことは常識かと。

問題 n を自然数とする。x の n 次式 $P_n(x)$ で $\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}=P_n(\cos\theta)$ $(0<\theta<\pi)$ であるものを考える。

(1) $P_1(x)$，$P_2(x)$，$P_3(x)$ をそれぞれ求めよ。

(2) $P_{n+1}(x)$ を $P_n(x)$，$P_{n-1}(x)$ を用いて表せ。ただし，$n\geqq 2$ である。

(3) $P_4(1)$ の値を求めよ。

(4) $P_4(\cos\theta)=0$ となる最小の θ $(0<\theta<\pi)$ を求めよ。

(5) $\left(1-\cos\dfrac{\pi}{5}\right)\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{5}\right)\left(1-\cos\dfrac{3\pi}{5}\right)\left(1-\cos\dfrac{4\pi}{5}\right)$ の値を求めよ。

解答 (1) 前述ゆえ，略。

(2) $\sin(n+2)\theta+\sin n\theta=2\sin(n+1)\theta\cos\theta$

　であるから　$\sin(n+2)\theta=2\sin(n+1)\theta\cos\theta-\sin n\theta$

　両辺を $\sin\theta(\neq 0)$ で割ると　$P_{n+1}(x)=2xP_n(x)-P_{n-1}(x)$　$(n\geqq 2)$　答

(3) (2) で，$n=3$ とすると，(1) により

$$\begin{aligned}P_4(x)&=2xP_3(x)-P_2(x)\\&=2x(8x^3-4x)-(4x^2-1)\\&=16x^4-12x^2+1\end{aligned}$$

　よって　$P_4(1)=16-12+1=5$　答

(4) $P_4(\cos\theta)=\dfrac{\sin 5\theta}{\sin\theta}$ より，$P_4(\cos\theta)=0$ とすると　$\dfrac{\sin 5\theta}{\sin\theta}=0$

　よって　$\sin 5\theta=0$　……①

　$0<\theta<\pi$ であるから　$0<5\theta<5\pi$

　よって，① から　$5\theta=\pi$，2π，3π，4π

　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{5}$，$\dfrac{2\pi}{5}$，$\dfrac{3\pi}{5}$，$\dfrac{4\pi}{5}$

　したがって，$P_4(\cos\theta)=0$ となる最小の θ は　$\dfrac{\pi}{5}$　答

(5) (4) より　　$P_4\left(\cos\frac{k\pi}{5}\right)=0$　($k=1,\ 2,\ 3,\ 4$)　……②

このとき，$\cos\frac{k\pi}{5}$ は互いに異なるから，② より，$x=\cos\frac{k\pi}{5}$　($k=1,\ 2,\ 3,\ 4$) は，

4 次方程式 $P_4(x)=0$ の異なる 4 つの解である。(3) より，$P_4(x)$ の x^4 の係数は 16 であるから

$$P_4(x)=16\left(x-\cos\frac{\pi}{5}\right)\left(x-\cos\frac{2\pi}{5}\right)\left(x-\cos\frac{3\pi}{5}\right)\left(x-\cos\frac{4\pi}{5}\right)$$

また，(3) より，$P_4(1)=5$ であるから

$$5=16\left(1-\cos\frac{\pi}{5}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)\left(1-\cos\frac{3\pi}{5}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{5}\right)$$

よって　　$\left(1-\cos\frac{\pi}{5}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)\left(1-\cos\frac{3\pi}{5}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{5}{16}$　　答

@ 問題文で露骨に定義式が与えられている。(1) は練習。(2) の漸化式が運命の分かれ道。示すべき漸化式が問題文に書かれていないので，証明の最初が厳し。実は，次の如く真正面から求めることができる。これも多くの文献には記載されていない。

(2) の別解

$$P_{n+1}(\cos\theta)=\frac{\sin(n+2)\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin\{(n+1)\theta+\theta\}}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin(n+1)\theta\cos\theta+\cos(n+1)\theta\sin\theta}{\sin\theta}$$

$$=\cos\theta\cdot\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin(n+2)\theta-\sin n\theta}{2\sin\theta}$$

よって　　$P_{n+1}(x)=xP_n(x)+\frac{1}{2}P_{n+1}(x)-\frac{1}{2}P_{n-1}(x)$

両辺を 2 倍して移項すると　　$P_{n+1}(x)=2xP_n(x)-P_{n-1}(x)$　　答

@ これなら，試験会場でも即興でできる。無関係に見える第 1 種，第 2 種が同じ漸化式を満たす点は実に興味深い。初期条件

$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x$　　　$U_0(x)=1,\ U_1(x)=2x$

のわずかな係数の違いから，一般項は後述の如くかなり異なることに。また，(4) を一般化すると，第 2 種チェビシェフ多項式の零点が定義により次のようになる。

参考 方程式 $U_n(x)=0$ の解は　　$x=\cos\frac{k}{n}\pi$　($k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$)

証明 $\sin n\theta=0$ より　$n\theta=k\pi$　よって　$\theta=\frac{k}{n}\pi$　　終

さらに，2016 年には同志社大学で次の如く出題された。

問題 2 以上の自然数 n に対し，$F_n(\theta)=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$　($0<\theta<\pi$)　として，次の問いに答えよ。

(1) $n\geqq 3$ のとき，$F_{n+1}(\theta)-F_{n-1}(\theta)$ を $\cos n\theta$ を用いて表せ。

(2) n が偶数のとき，$F_n(\theta)$ を $\cos\theta$，$\cos 2\theta$，$\cos 3\theta$，……，$\cos(n-1)\theta$ を用いて表せ。

(3) m を自然数とするとき，数学的帰納法を用いて，次の等式が成立することを示せ。

$$F_{2^m}(\theta)=2^m\cos\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\cdots\cdots\cos 2^{m-1}\theta$$

(4) 自然数 k，l に対して，定積分 $\int_0^{\pi}\cos kx\cos lx\,dx$ を求めよ。

(5) 自然数 m に対して，定積分 $\int_0^{\pi}(\cos x\cos 2x\cos 2^2x\cdots\cdots\cos 2^{m-1}x)^2dx$ を求めよ。

解答 (1) $F_{n+1}(\theta)-F_{n-1}(\theta)=\dfrac{\sin(n+1)\theta-\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}=\dfrac{2\cos n\theta\sin\theta}{\sin\theta}=2\cos n\theta$　答

(2) (1) の結果から，n が偶数であるとき

$$F_n(\theta)-F_{n-2}(\theta)=2\cos(n-1)\theta$$
$$F_{n-2}(\theta)-F_{n-4}(\theta)=2\cos(n-3)\theta$$
$$\cdots\cdots$$
$$F_6(\theta)-F_4(\theta)=2\cos 5\theta$$
$$F_4(\theta)-F_2(\theta)=2\cos 3\theta$$

これら加えると　$F_n(\theta)-F_2(\theta)=2\{\cos 3\theta+\cdots\cdots+\cos(n-1)\theta\}$

よって　$F_n(\theta)=2\{\cos 3\theta+\cdots\cdots+\cos(n-1)\theta\}+F_2(\theta)$

$F_2(\theta)=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$　……① であるから

$F_n(\theta)=2\{\cos\theta+\cos 3\theta+\cdots\cdots+\cos(n-1)\theta\}$　答

(3) $F_{2^m}(\theta)=2^m\cos\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\cdots\cdots\cos 2^{m-1}\theta$　……② とおく。

[1] $m=1$ のとき

① より $F_2(\theta)=2\cos\theta$ であるから，② は成り立つ。

[2] $m=M$ のとき

② が成り立つと仮定すると

$$F_{2^{M+1}}(\theta)=\frac{\sin 2^{M+1}\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin 2^M\theta\cos 2^M\theta}{\sin\theta}=F_{2^M}(\theta)\cdot 2\cos 2^M\theta$$
$$=2^M\cos\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\cdots\cdots\cos 2^{M-1}\theta\cdot 2\cos 2^M\theta$$
$$=2^{M+1}\cos\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\cdots\cdots\cos 2^M\theta$$

よって，$m=M+1$ のときも ② が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 m に対して ② が成り立つ。　終

(4) $\cos kx\cos lx=\dfrac{1}{2}\{\cos(k+l)x+\cos(k-l)x\}$

[1] $k=l$ のとき

$$\int_0^{\pi}\cos kx\cos lx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2kx)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2k}\sin 2kx\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$　答

[2] $k\neq l$ のとき

$$\int_0^{\pi}\cos kx\cos lx\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k+l}\sin(k+l)x+\frac{1}{k-l}\sin(k-l)x\right]_0^{\pi}=0$$　答

(5) (2)，(3) から

$$(\cos x\cos 2x\cos 2^2x\cdots\cdots\cos 2^{m-1}x)^2$$

$$=\left\{\frac{F_{2^m}(x)}{2^m}\right\}^2$$

$$=\left[\frac{2}{2^m}\{\cos x+\cos 3x+\cdots\cdots+\cos(2^m-1)x\}\right]^2$$

$$=\frac{1}{2^{2m-2}}\{\cos x+\cos 3x+\cdots\cdots+\cos(2^m-1)x\}^2$$

$\{\cos x+\cos 3x+\cdots\cdots+\cos(2^m-1)x\}^2$ を展開すると，

$\cos^2 kx$ (k は 2^m-1 以下の奇数，2^{m-1} 個) の和と $2\cos kx\cos lx$

(k，l は $1\leqq k<l\leqq 2^m-1$ を満たす奇数) の和で表される。

よって，(4) の結果から

$$\int_0^{\pi}(\cos x\cos 2x\cos 2^2x\cdots\cdots\cos 2^{m-1}x)^2\,dx$$

$$=\frac{1}{2^{2m-2}}\left\{\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx+\int_0^{\pi}\cos^2 3x\,dx+\cdots\cdots+\int_0^{\pi}\cos^2(2^m-1)x\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{2m-2}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2^{m-1}=\frac{\pi}{2^m}$$ 答

実は，前世紀 1996 年に京大後期理系では，第 1 種，第 2 種の合体問題が次の如く出題された。

問題 n は自然数とする。

(1) すべての実数 θ に対し $\cos n\theta=f_n(\cos\theta)$，$\sin n\theta=g_n(\cos\theta)\sin\theta$ を満たし，係数がともにすべて整数である n 次式 $f_n(x)$ と $n-1$ 次式 $g_n(x)$ が存在することを示せ。

(2) $f_n'(x)=ng_n(x)$ であることを示せ。

(3) p を 3 以上の素数とするとき，$f_p(x)$ の $p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れることを示せ。

解答 (1) 証明 $n=1$ のとき　$f_1(x)=x$，$g_1(x)=1$ とおけばよい。

$n=k$ のとき　題意を満たす $f_k(x)$，$g_k(x)$ が存在すると仮定する。

$n=k+1$ のとき

$$\cos(k+1)\theta=\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta$$

$$=f_k(\cos\theta)\cos\theta-g_k(\cos\theta)\sin^2\theta$$

$$\sin(k+1)\theta=g_k(\cos\theta)\sin\theta\cos\theta+f_k(\cos\theta)\sin\theta$$

ここで $f_{k+1}(x)=f_k(x)x-g_k(x)(1-x^2)$，$g_{k+1}(x)=g_k(x)x+f_k(x)$ とおくと，題意を満たす。

以上から，数学的帰納法により条件を満たす $f_n(x)$ と $g_n(x)$ が存在する。　終

(2) 証明 $\cos n\theta=f_n(\cos\theta)$ の両辺を θ で微分すると

$$-n\sin n\theta=f_n'(\cos\theta)(-\sin\theta)$$

よって　$-ng_n(\cos\theta)\sin\theta=f_n'(\cos\theta)(-\sin\theta)$ が任意の θ に対して成り立つ。

特に，$ng_n(x)=f_n'(x)$ が無限個の x について成り立ち，かつ，両辺は多項式であるから，恒等的に $f_n'(x)=ng_n(x)$ である。　終

(3) 証明 $f_p(x)=a_px^p+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ とおくと，(2) より

$$f_p'(x)=pa_px^{p-1}+\cdots\cdots+a_1=pg_p(x)$$

係数を比較して，$k=1$，…，$p-1$ に対し，ka_k は p で割り切れる。ここで，p は素数であるから，a_k は p で割り切れる。　終

@ $f_n(x)$ が first kind，$g_n(x)$ が second kind である。両方同時出題とは，さすが京大。さらに，微分で繋がることまで出題するとは。この事実を公式化すると

$$T_n'(x)=nU_{n-1}(x)$$

また，これをうまく用いた (3) も渋い出題。この頃からあちこちの大学でこの素材が頻繁に出題され始めた。なお，次数がミスマッチであるのは，(2) の index を合わせたのと連立漸化式を立てたからである。連立漸化式にしようと思えば，必ずこの次数ミスマッチ型で。本論文では次数ミスマッチ型は採用しなかった。実は前世紀 1991 年には東大でも次の如く類題が出題されていた。ただし，$\cos^n\theta$ を括り出した形での出題ゆえチェビシェフ多項式ではないが，同様な思考をすることに。受験生は類題とはまったく気づかなかったかと。

問題 (1) 自然数 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して，ある多項式 $p_n(x)$，$q_n(x)$ が存在して

$$\sin n\theta=p_n(\tan\theta)\cos^n\theta \qquad \cos n\theta=q_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

と書けることを示せ。

(2) このとき，$n\geqq 1$ ならば次の等式が成立することを証明せよ。

$$p_n'(x)=nq_{n-1}(x) \qquad q_n'(x)=-np_{n-1}(x)$$

@ 解答は帰納法による (略)。東大はわざわざ類題にして出題。対して京大は，そのものでの出題。両大学の入試問題に対する作問思想の違いが垣間見えるのはおもろい。では，お約束の一般項を。隣接 3 項間漸化式の解法もできるが，冗長ゆえ Euler's formula を用いる解法だけにしておくのが品がよいかと。同様に，de Moivre's formula を用いた解法も可能。

問題 $U_{n-1}(x)$ を求めよ。

解答
$$U_{n-1}(\cos\theta)=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$
$$=\frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}\cdot\frac{2i}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}$$
$$=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^n-(\cos\theta-i\sin\theta)^n}{\cos\theta+i\sin\theta-(\cos\theta-i\sin\theta)}$$
$$=\frac{1}{2i\sin\theta}\{(\cos\theta+i\sin\theta)^n-(\cos\theta-i\sin\theta)^n\}$$

$x=\cos\theta$ $(0<\theta<\pi)$ とおくと，$\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$ (>0) であるから

$$U_{n-1}(x)=\frac{1}{2i\sqrt{1-x^2}}\{(x+i\sqrt{1-x^2})^n-(x-i\sqrt{1-x^2})^n\}$$ 答

@ すべて整数係数であるのに根号が入るのは，Fibonacci sequence と同様。しかも，虚数単位の i まで入る。気持ち悪いが，実際に $n=1, 2, 3$ などを代入してみると正しいことがわかる。ここで，$i=\sqrt{-1}$ を用いると

$$U_{n-1}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\{(x+\sqrt{x^2-1})^n-(x-\sqrt{x^2-1})^n\}\cdots\cdots②$$

となる。こちらのほうが威圧感がないか。ところが，定義域は $-1<x<1$ ゆえ，② の式表示の根号の中身は負である。それなら，① の表示の方が気持ち悪くないかもしれぬ。ほかの場合の計算は T_n と同様ゆえ省略するが，分母を払って結果をまとめると関数としての U_{n-1} は次の如し。どうぞ，読者諸賢で実際に計算してご確認あれ。特に最初の式の符号に注意。これはやむを得ぬ。

- $U_{n-1}(-\cosh t)\sinh t=(-1)^{n-1}\sinh nt \quad (x\leqq -1)$
- $U_{n-1}(\cos t)\sin t=\sin nt \quad (-1\leqq x\leqq 1)$
- $U_{n-1}(\cosh t)\sinh t=\sinh nt \quad (1\leqq x)$

@ 以上の考察でわかったことは，$T_n(x)$ と $U_{n-1}(x)$ の双対性である。数学の世界では，かような 2 つの関係性を双対性 (duality) というが，これを美しいと感じるかどうかは感性の問題。次の別解はさらに鮮やか。ただし，$-1<x<1$ 限定である。

別解 $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ 　の両辺を θ で微分すると

$$-\sin\theta T_n'(\cos\theta)=-n\sin n\theta$$

両辺を $\sin\theta(\neq 0)$ で割ると　　$T_n'(x)=nU_{n-1}(x)$ 　　← 前述の如し

ここで　$T_n(x)=\frac{1}{2}\{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n\}$ 　であるから

$$T_n'(x)=\frac{n}{2}\{(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}})(x+\sqrt{x^2-1})^{n-1}+(1-\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}})(x-\sqrt{x^2-1})^{n-1}\}$$

$$=\frac{n}{2}\{\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}\cdot(x+\sqrt{x^2-1})^{n-1}+\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}\cdot(x-\sqrt{x^2-1})^{n-1}\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(x+\sqrt{x^2-1})^n-(x-\sqrt{x^2-1})^n\}$$

よって　$U_{n-1}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\{(x+\sqrt{x^2-1})^n-(x-\sqrt{x^2-1})^n\}$ 　答

では，そのほかの場合について考えてみよう。そのため，次の微分公式を準備しておく。

$$(\sinh x)'=\cosh x \qquad (\cosh x)'=\sinh x$$

@ 易しいので，証明略。読者諸賢でどうぞ。

- $x>1$ のとき　$T_n(\cosh t)=\cosh nt$ の両辺を t で微分すると

$$\sinh t T_n'(\cosh t)=n\sinh nt$$

両辺を $\sinh t(\neq 0)$ で割ると　　$T_n'(x)=nU_{n-1}(x)$

- $x<-1$ のとき　$T_n(-\cosh t)=(-1)^n\cosh nt$ の両辺を t で微分すると

$$-\sinh t T_n'(-\cosh t)=(-1)^n n\sinh nt$$

両辺を $-\sinh t(\neq 0)$ で割ると　　$T_n'(x)=nU_{n-1}(x)$

では，同様な方法で，$U'_{n-1}(x)$ を考えてみよう。

問題 $U'_{n-1}(x)$ を $T_n(x)$，$U_{n-1}(x)$ を用いて表せ。

解答 ・$-1<x<1$ のとき

$\sin\theta U_{n-1}(\cos\theta)=\sin n\theta$ の両辺を θ で微分すると

$$\cos\theta U_{n-1}(\cos\theta)+\sin\theta(-\sin\theta)U'_{n-1}(\cos\theta)=n\cos n\theta$$

両辺を $\sin^2\theta(\neq 0)$ で割ると　　$U'_{n-1}(\cos\theta)=\frac{-n\cos n\theta+\cos\theta U_{n-1}(\cos\theta)}{\sin^2\theta}$

よって　$U'_{n-1}(x)=\dfrac{nT_n(x)-xU_{n-1}(x)}{x^2-1}$　答

・$x>1$ のとき

$\sinh t U_{n-1}(\cosh t)=\sinh nt$ の両辺を t で微分すると

$$\cosh t U_{n-1}(\cosh t)+\sinh t \sinh t U'_{n-1}(\cosh t)=n\cosh nt$$

両辺を $\sinh^2 t(\neq 0)$ で割ると　$U'_{n-1}(\cosh t)=\dfrac{n\cosh t-\cosh t U_{n-1}(\cosh t)}{\sinh^2 t}$

よって　$U'_{n-1}(x)=\dfrac{nT_n(x)-xU_{n-1}(x)}{x^2-1}$　答

・$x<-1$ のとき

$\sinh t U_{n-1}(-\cosh t)=(-1)^{n-1}\sinh nt$ の両辺を t で微分すると

$$-\cosh t U_{n-1}(-\cosh t)+\sinh t(-\sinh t)U'_{n-1}(-\cosh t)=(-1)^{n-1}n\cosh nt$$

両辺を $\sinh^2 t(\neq 0)$ で割ると　$U'_{n-1}(-\cosh t)=\dfrac{(-1)^n n\cosh t-\cosh t U_{n-1}(-\cosh t)}{\sinh^2 t}$

よって　$U'_{n-1}(x)=\dfrac{nT_n(x)-xU_{n-1}(x)}{x^2-1}$　答

@ $U'_{n-1}(x)$ を表すには，$T_n(x)$ と $U_{n-1}(x)$ の両方が必要になった。やはりこちらのほうが複雑。

最後に，漸化式から三角関数級数の和を求めてみよう。これも双対的な計算に。

オマケコーナーその３

問題 $A=\sum_{k=1}^{n}\sin kx$ を求めよ。

解答・$x=2m\pi$　（m は整数）のとき　$A=0$

・$x\neq 2m\pi$　（m は整数）のとき　$\sin x\neq 0$ であるから，

漸化式 $U_k(x)=2xU_{k-1}(x)-U_{k-2}(x)$ により

$$\frac{\sin(k+1)x}{\sin x}=2\cos x\cdot\frac{\sin kx}{\sin x}-\frac{\sin(k-1)x}{\sin x}\qquad(k\geqq 2)$$

$$\sin(k+1)x=2\cos x\sin kx-\sin(k-1)x\qquad(k\geqq 2)$$

$k=1$ のとき，この式は $\sin 2x=2\cos x\sin x$ となり，成り立つ。

$k=1$，2，3，……，n を代入して和をとると

$$\sum_{k=2}^{n+1}\sin kx=2\cos x\sum_{k=1}^{n}\sin kx-\sum_{k=0}^{n-1}\sin kx$$

$$\sin(n+1)x-\sin x+\sum_{k=1}^{n}\sin kx=2\cos x\sum_{k=1}^{n}\sin kx+\sin nx-\sum_{k=1}^{n}\sin kx$$

$\sin(n+1)x-\sin x+A=2A\cos x+\sin nx-A$　← A がたくさん現れた！

$$2(1-\cos x)A=\sin nx-\sin(n+1)x+\sin x$$

$$4A\sin^2\frac{x}{2}=-2\cos\frac{2n+1}{2}x\sin\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$\sin\dfrac{x}{2}\neq 0$ より　$2A\sin\dfrac{x}{2}=-\cos\dfrac{2n+1}{2}x+\cos\dfrac{x}{2}$

$$A=\frac{2\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

以上から $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} & (x\fallingdotseq 2m\pi,\ m\text{ は整数})\\ 0 & (x=2m\pi,\ m\text{ は整数})\end{cases}$ 答

@ 漸化式からうまく A をつくると，かように見事に解ける。両辺を $\sin\frac{x}{2}$ で割る必要があるので，場合分けが発生するのは必定。

4 チェビシェフ分数式 (仮称) について

定義 次で定まる式 $V_n(x)$ を Chebyshev fractional expressions of the first kind ということにする。これまでとは異なり，定義域が実数全体であることも注意しておく。

$$V_n(\tan\theta)=\tan n\theta\ \left(\theta\fallingdotseq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ n\text{ は自然数，}k\text{ は整数}\right)$$

例 $V_1(\tan\theta)=\tan 1\theta$ ゆえ $V_1(x)=x$ (形式的に $V_0(\tan\theta)=\tan 0\theta$ ゆえ $V_0(x)=0$)

$V_2(\tan\theta)=\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ ゆえ $V_2(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$

$V_3(\tan\theta)=\tan 3\theta=\dfrac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$ ゆえ $V_3(x)=\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$

漸化式は，加法定理により一瞬の技。

$$V_{n+1}(\tan\theta)=\tan(n+1)\theta=\frac{\tan\theta+\tan n\theta}{1-\tan\theta\tan n\theta}$$

よって $V_{n+1}(x)=\dfrac{x+V_n(x)}{1-xV_n(x)}$

帰納法により，すべて整数係数の分数式になることが容易に証明できる。読者諸賢でどうぞ。

1 次分数漸化式ゆえ，不動点 $\pm i$ を用いて一般項が次の如く求められる。概略のみ述べておく。

問題 $V_n(x)$ を求めよ。

解答 簡単のため，$V_n(x)=a_n$ とおく ($n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$) ← $n=0$ からにするのがお得

漸化式は $a_{n+1}=\dfrac{x+a_n}{1-xa_n}$

である。ここで，$b_n=\dfrac{a_n+i}{a_n-i}$ とおくと，漸化式は $b_{n+1}=\dfrac{i+x}{i-x}b_n$ となる。

$b_0=-1$ であるから $b_n=-\left(\dfrac{i+x}{i-x}\right)^n$

したがって $V_n(x)=\dfrac{(i+x)^n-(i-x)^n}{(i+x)^n+(i-x)^n}i$ 答

@ 途中計算は実はやや長い。1 次分数漸化式のよき復習問題かと。係数に虚数単位 i が入るのは気持ち悪いが，実際に $n=1,\ 2,\ 3$ などを代入してみると正しいことがわかる。なお，tan ゆ

え，次の如く暗算レベルのスーパー別解も可能。

別解 de Moivre's formula により

$$V_n(\tan\theta)=\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}$$

$$=\frac{\cos n\theta+i\sin n\theta-(\cos n\theta-i\sin n\theta)}{2i}\cdot\frac{2}{\cos n\theta+i\sin n\theta-(\cos n\theta+i\sin n\theta)}$$

$$=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^n-(\cos\theta-i\sin\theta)^n}{(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta-i\sin\theta)^n}\cdot\frac{1}{i}$$

$$=\frac{(1+i\tan\theta)^n-(1-i\tan\theta)^n}{(1+i\tan\theta)^n+(1-i\tan\theta)^n}\cdot\frac{1}{i}$$

したがって　$V_n(x)=\dfrac{(1-ix)^n-(1+ix)^n}{(1-ix)^n+(1+ix)^n}i$　答

@ 先ほどの答えと食い違って見えるが，実は同じ。Euler's formula の利用も可。

では，微分してみよう。

問題 $V'_n(x)$ を求めよ。

解答 $V_n(\tan\theta)=\tan n\theta$ の両辺を θ で微分すると

$$V'_n(\tan\theta)\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{n}{\cos^2 n\theta}$$

$$V'_n(\tan\theta)\cdot(1+\tan^2\theta)=n(1+\tan^2 n\theta)$$

よって　$V'_n(x)=n\cdot\dfrac{1+\{V(x)\}^2}{1+x^2}$　答

次に second kind を。まずは準備として定義をしておく。

$$\tanh t=\frac{\sinh t}{\cosh t}\ \left(=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\right)$$　：この関数を hyperbolic tangent (双曲線正接) という。

次の公式が成り立つことがわかる。これも三角関数と双曲線関数の双対性。証明は簡単ゆえ，略。

- $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$
- $1-\tanh^2 t=\dfrac{1}{\cosh^2 t}$
- $\sinh(\alpha\pm\beta)=\sinh\alpha\cosh\beta\pm\cosh\alpha\sinh\beta$
- $\cosh(\alpha\pm\beta)=\cosh\alpha\cosh\beta\pm\sinh\alpha\sinh\beta$
- $\tanh(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tanh\alpha\pm\tanh\beta}{1\pm\tanh\alpha\tanh\beta}$　(すべて複号同順)　← 符号が揃い，気持ちよい

定義 次で定まる式 $W_n(x)$ を Chebyshev fractional expressions of the second kind

ということにする。これも定義域が実数全体であることにも注意しておく。

$$W_n(\tanh t)=\tanh nt\quad (n \text{ は自然数})$$

例 $W_1(\tanh t)=\tanh 1t$　ゆえ　$W_1(x)=x$　(形式的に　$W_0(\tanh t)=\tanh 0t$　　$W_0(x)=0$)

$W_2(\tanh t)=\tanh 2t=\dfrac{2\tanh t}{1+\tanh^2 t}$　ゆえ　$W_2(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$

$W_3(\tanh t)=\tanh 3t=\dfrac{3\tanh t+\tanh^3 t}{1+3\tanh^2 t}$　ゆえ　$W_3(x)=\dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}$

漸化式は，上記の加法定理により一瞬の技。

$$W_{n+1}(x)=\frac{x+W_n(x)}{1+xW_n(x)}$$

帰納法により，すべて整数係数の分数式になる。

1 次分数漸化式ゆえ，不動点 ± 1 を用いて一般項が求められるが，次の方法なら暗算レベル。

解答 $W_n(\tanh t)=\tanh nt$

$$=\frac{e^{nt}-e^{-nt}}{e^{nt}+e^{-nt}}$$

$$=\frac{(\cosh t+\sinh t)^n-(\cosh t-\sinh t)^n}{(\cosh t+\sinh t)^n+(\cosh t-\sinh t)^n}$$

$$=\frac{(1+\tanh t)^n-(1-\tanh t)^n}{(1+\tanh t)^n+(1-\tanh t)^n}$$

したがって　$W_n(x)=\dfrac{(1+x)^n-(1-x)^n}{(1+x)^n+(1-x)^n}$　答

@ こちらには，虚数単位 i は入らない。なお，de Moivre's formula

$(\cosh t+\sinh t)^n=\cosh nt+\sinh nt$ を用いた別解も可能。どうぞ読者諸賢でお試しあれ。

次に微分の準備公式を。証明は簡単ゆえ，略。

$$(\tanh x)'=\frac{1}{\cosh^2 x}$$

問題 $W'_n(x)$ を求めよ。

解答 $W(\tanh t)=\tanh nt$ の両辺を t で微分すると

$$W'_n(\tanh t)\cdot\frac{1}{\cosh^2 t}=\frac{n}{\cosh^2 t}$$

$$W'_n(\tanh t)\cdot(1-\tanh^2 t)=n(1-\tanh^2 nt)$$

よって　$W'_n(x)=n\cdot\dfrac{1-\{W(x)\}^2}{1-x^2}$　答

5 おわりに

実は，今回話題にした双曲線関数は令和 3 年度大学入学共通テスト数学Ⅱ・B 第 2 問（令和 7 年度試作問題に転用）に素材として使われていた。問題は次の如し。

問題 二つの関数 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$ について考える。

(1) $f(0)=$ $\boxed{\text{ア}}$，$g(0)=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。また，$f(x)$ は相加平均と相乗平均の関係から，

$x=$ $\boxed{\text{ウ}}$ で最小値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。

$g(x)=-2$ となる x の値は $\log_2\left(\sqrt{\boxed{\text{オ}}}-\boxed{\text{カ}}\right)$ である。

(2) 次の ① ～ ④ は，x にどのような値を代入してもつねに成り立つ。

$f(-x)=$ $\boxed{\text{キ}}$　…… ①

$g(-x)=$ $\boxed{\text{ク}}$　…… ②

$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=$ $\boxed{\text{ケ}}$　…… ③

$g(2x)=$ $\boxed{\text{コ}}$ $f(x)g(x)$　…… ④

$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $f(x)$	① $-f(x)$	② $g(x)$	③ $-g(x)$

(3) 花子さんと太郎さんは，$f(x)$ と $g(x)$ の性質について話している。

花子：① ～ ④ は三角関数の性質に似ているね。

太郎：三角関数の加法定理に類似した式(A) ～(D) を考えてみたけど，つねに成り立つ式はあるだろうか。

花子：成り立たない式を見つけるために，式(A) ～ (D) の β に何か具体的な値を代入して調べてみたらどうかな。

太郎さんが考えた式

$$f(\alpha-\beta)=f(\alpha)g(\beta)+g(\alpha)f(\beta) \quad \cdots\cdots \text{(A)}$$
$$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta) \quad \cdots\cdots \text{(B)}$$
$$g(\alpha-\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta) \quad \cdots\cdots \text{(C)}$$
$$g(\alpha+\beta)=f(\alpha)g(\beta)-g(\alpha)f(\beta) \quad \cdots\cdots \text{(D)}$$

(1)，(2) で示されたことのいくつかを利用すると，式(A) ～ (D) のうち，$\boxed{\text{サ}}$ 以外の三つは成り立たないことがわかる。$\boxed{\text{サ}}$ は左辺と右辺をそれぞれ計算することによって成り立つことが確かめられる。

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ (A)	① (B)	② (C)	③ (D)

誰でもできる易問ゆえ，解答略。実は当時共通テスト1週間前に校内における数学同好会講座で1年生に教えたばかりで，まさか翌週出題されるとは。部員も私も驚嘆した懐かしい思い出がある。その時には，3倍角の公式まで証明させた。楽勝でできた生徒も数名存在した。そのうちの1名は昨春の入試で東大理科Ⅲ類に現役合格した。「残念，3年生にやらせておけば……」と悔いた。出題者は，全国規模の大試験に知っているか否かで大差がつく素材を出題してはならぬという常識さえもたぬとは，開いた口が塞がらぬ。

そもそも，花子の最初の発言により，$\boxed{\text{ケ}}$ は1，$\boxed{\text{コ}}$ は2に決まっており，誠に品がない。さらに，倍角公式 ④ の後で太郎が加法定理を考えるのは順序が逆で不自然。花子の最後の発言は最終設問のヒントになっており，読み飛ばせない。なお，この最後の発言で

- $\beta=0$ を代入すると，誘導どおり式(A) ～ (D) のうち，成り立たないものを見つけることに。
- $\beta=-\alpha$ を代入すると，誘導とは反して式(B) が一発で見つかる。

読者諸賢は如何なるご感想をおもちか。わざわざ遠回りの誘導をするとは，呆れ果てる。かような悪い誘導のままで大試験に出題するとは。挙句の果てに試作問題に転用するとは。また，双曲線関数を知る受験生は，$g(2)$ のみ計算して他の設問は瞬殺。

来年度から，いよいよ新課程入試が始まる。初年度は易しいことが予想されるが，果たしていかなる愚問が出題されるか今から楽しみ。筆者は日々現場での勤務が多忙であるが，日程など条件が合えば作問･審査･大幅改題をして差し上げることも可能。

筆者は非常勤および予備校講師満 3 年の新参者。毎日あちこちで多様な生徒との出会いは宝物。参考書の執筆活動もさせて戴いている。今回話題にした双対性は，40 年前に専攻した非可換環論において登場した。非常に懐かしい。なお，本論文のオリジナル内容は，大部分が休日遠距離ロードや県内外の山頂や尾根などで考えたもの。作問能力，改題能力，暗算能力等は格段の進歩を遂げた。しかしながら，私もまだまだ発展途上人。枕を濡らして眠れぬ夜を過ごすこともしばしば。これからも進化を続けて参ります。教師たるもの，生涯求道者。収束などいたしません。群れを嫌い，権威と束縛を嫌い，たたき上げのスキルと専門家としての高い誇りとライセンス，そしてカリスマ性で今後も生きて参ります。最後になりましたが，発表の機会をくださった編集委員の先生方，そして拙作を最後までお読みくださった読者の皆様に心より御礼申しあげます。

参考文献

大学入試センター　　令和 3 年度大学入学共通テスト数学Ⅱ･B 第 2 問

山川　宏史　　フォーカスゴールド数学B+C 5th Edition (共著) の実戦編　　啓林館

山川　宏史　　フォーカスゴールド数学Ⅲ　5th Edition (共著) の実戦編　　啓林館