複素平面とベクトルの内積，面積公式を深く探る

山　川　宏　史

岡山朝日研究紀要 第45号（2024年 3 月）抜刷
〒703-8278 岡山市中区古京町2-2-21

複素平面とベクトルの内積，面積公式を深く探る

山　川　宏　史

1 はじめに

複素平面の応用として，ベクトルの内積と面積計算があることを読者諸賢はご存じであろうか。あまり知られていないようであるが，実は大学入試にも密かに出題されている。今回機会が与えられたので，この話題について深めてみた。近い将来，大学入試の流行になるかもしれぬ。

2 複素平面とベクトルの内積

では，早速次の問題を考えてみよう。

問題 複素平面上に異なる 3 点 O(0)，A(α)，B(β) がある。内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値を α，β を用いて表せ。

解答 △OAB において余弦定理により

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB}$$

$$|\beta-\alpha|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

よって　$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\{\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}-(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})\}$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta})$$

O，A，B が一直線上にあるときにも，余弦定理とこの式は成り立つ。　答

別解 原点 O を中心に全体を $-\arg\alpha$ だけ回転させて，2 つの複素数

$$\alpha'=\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\alpha\ (=|\alpha|),\quad \beta'=\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\beta$$

に対して，点 A'(α')，B'(β') を考える。点 A' は実軸正の部分に存在する。$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ の実軸への正射影を $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ とすると，符号も含めて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\mathrm{Re}\beta'$$

$$=\frac{1}{2}(\beta'+\overline{\beta'})=\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\beta+\frac{\alpha}{|\alpha|}\overline{\beta}\right)$$

よって　$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}|\alpha|\left(\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\beta+\frac{\alpha}{|\alpha|}\overline{\beta}\right)=\frac{1}{2}(\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta})$$　答

@ 係数の $\frac{1}{2}$ は，本解なら余弦定理の，別解なら実部公式の名残りとわかる。さらなる別解は

$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ とおいて，実際に計算を(易ゆえ略)。なお，2 点が一致する場合も

- A＝O または B＝O のときは　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$
- A＝B のときは　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\alpha|^2$

として上の式は成り立っている。ここで，$\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}$ は実数である。実際に

$$\overline{\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}}=\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$$

である。以上の準備を踏まえて，次の 2020 年一橋大学の過去問を複素平面で解答してみよう。

問題 半径 1 の円周上に 3 点 A，B，C がある。内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の最大値と最小値を求めよ。

解答 3 点 A(1)，B(z)，C(w)　(|z|=|w|=1)　と設定しても一般性を失わない。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\{\overline{(z-1)}(w-1)+(z-1)\overline{(w-1)}\}$$

$$=\frac{1}{2}(z\overline{w}+\overline{z}w-z-\overline{z}-w-\overline{w}+2)$$

$$=\frac{1}{2}\{z(\overline{z}+\overline{w}-1)+w(\overline{z}+\overline{w}-1)-(\overline{z}+\overline{w}-1)-1\}$$ ← この変形がポイントに

$$=\frac{1}{2}\{(z+w-1)\overline{(z+w-1)}-1\}$$

$$=\frac{1}{2}(|z+w-1|^2-1)\ \cdots\cdots ①$$ ← 厳しき式変形

$z+w=1$ すなわち　ひし形 OBAC ができるとき

すなわち　z，w が $\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

また，三角不等式により　$|z+w-1|\leqq|z|+|w|+1\leqq 3$

であるから，z，w，-1 が同じ向き　すなわち $z=w=-1$ のとき最大値 4 をとる。　答

@ これは鮮やか。複素平面における内積公式で立式は可能であるが，その次の式変形 ① は厳し。なお，A(0)，B(1+z)，C(1+w)　(|z|=|w|=1)　と設定してもよい。しかし，これら複素平面解法は試験会場では気づかぬ。特に文系受験生には不可能。この問題は設定が単純ゆえ，別解多し。なお，世に広く出回っている解法は次の如し。

別解 △ABC の外心を O とすると　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+1\ \cdots\cdots ②$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}$ とおくと

$$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2=\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}\right|^2$$

$$=\frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{2}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2-1$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2-1-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}+1$$

$$=2\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2-\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

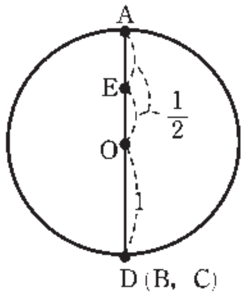
$$=2\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2-\frac{1}{2}$$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とすると

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE}|^2-\frac{1}{2}=2|\overrightarrow{ED}|^2-\frac{1}{2}$$

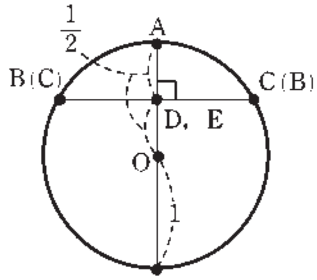
ここで，$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}$　すなわち　$\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}=-\overrightarrow{OA}$ のとき，

$|\overrightarrow{ED}|$ は最大値 $\dfrac{3}{2}$ をとる。



また，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}$　すなわち　$\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ のとき，

$|\overrightarrow{ED}|$ は最小値 0 をとる。



よって，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の最大値は　　$2\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}=4$

最小値は　　$2\cdot0^2-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$　　答

@ 実は，② は次の如く短い式変形で対応可能。

$$②=\frac{1}{2}(1+1+1-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-1)$$

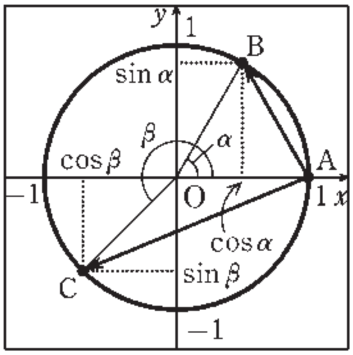
$$=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|^2-1)$$

これは本解の式変形 ① に相当する。かように，複素平面とベクトルは相性がよいことは周知の事実。点 D，E を設定して処理したが，次の如く三角関数を利用する解法が自然かと。

別解 xy 平面において，A$(1,\ 0)$，B$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$$(0\leqq\alpha<2\pi)$，C$(\cos\beta,\ \sin\beta)$$(0\leqq\beta<2\pi)$ と設定しても一般性を失わない。

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha-1,\ \sin\alpha)$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(\cos\beta-1,\ \sin\beta)$$



よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=(\cos\alpha-1)(\cos\beta-1)+\sin\alpha\sin\beta\\&=\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha-\cos\beta+1+\sin\alpha\sin\beta\\&=\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha-\cos\beta+1\\&=2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\alpha+1\end{aligned}$$

ここで，$0\leqq\beta<2\pi$ であるから，$-\dfrac{\alpha}{2}\leqq\beta-\dfrac{\alpha}{2}<2\pi-\dfrac{\alpha}{2}$ より

$$-1\leqq\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\leqq1$$

また，$0\leqq\alpha<2\pi$ より　　$0\leqq\sin\dfrac{\alpha}{2}\leqq1$　……①

よって　　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\geqq-2\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\alpha+1$　　　← β を消去したことに相当

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\leqq2\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\alpha+1$　　　← 同上

$f(\alpha)=-2\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\alpha+1$，$g(\alpha)=2\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\alpha+1$ とおくと

$$f(\alpha)=-2\sin\frac{\alpha}{2}-\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+1 \qquad \leftarrow \text{これで 1 変数に}$$

$$=2\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}=2\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

$$g(\alpha)=2\sin\frac{\alpha}{2}-\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+1 \qquad \leftarrow \text{同上}$$

$$=2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}=2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

さらに，$0\leqq\alpha<2\pi$，$0\leqq\beta<2\pi$ より　　$-\pi<\beta-\dfrac{\alpha}{2}<2\pi$

① の範囲で，$f(\alpha)$ は $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{2}$ をとる。

ゆえに，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ は　　$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}$，$\sin\left(\beta-\dfrac{\alpha}{2}\right)=-1$

　すなわち　$(\alpha,\ \beta)=\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi\right)$，$\left(\dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$　のとき，最小値 $-\dfrac{1}{2}$ をとる。

また，① の範囲で，$g(\alpha)$ は $\sin\dfrac{\alpha}{2}=1$ のとき最大値 4 をとる。

よって，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ は $\sin\dfrac{\alpha}{2}=1$，$\sin\left(\beta-\dfrac{\alpha}{2}\right)=1$

　すなわち　$(\alpha,\ \beta)=(\pi,\ \pi)$　のとき，最大値 4 をとる。　　答

@ これら別解はいずれも駄作かと。秀作は以下のアイディアで(詳細略)。

内積の定義により，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の最大値は AB=AC=2，$\theta=0$ が全て成り立つ場合に限る。この実現性を調べて瞬殺。

最小値は　A$(1,\ 0)$，B$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，C$(\cos\beta,\ \sin\beta)$ と設定し

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha-\cos\beta+1+\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\cos(\alpha-\beta)-2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1$$

$$=2\left(\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$$

と変形して

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0,\ \cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\pm1$$

がともに成り立つ場合に限る。この実現性を調べて暗算レベル。

@ 和積交換公式を用いて平方完成した。内積を正射影ととらえると，別解も発生。その際には

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cos(\alpha-\beta)\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

となり，これを上記の如く変形することに。このままでは不可。

@ 偏微分の問題ととらえて，2 変数関数

$$f(x,\ y)=\cos(x-y)-\cos x-\cos y$$

の閉集合 $0\leqq x\leqq y\leqq 2\pi$ における最大値，最小値を求めてもよい。大学初年度演習問題。

3 複素平面と三角形面積公式

これまでの準備を踏まえて，面積公式を導出してみよう。まずは，三角形から。

問題 複素平面上に異なる 4 点O(0)，A(α)，B(β)，C(γ) がある。次のものを α，β，γ を用いて表せ。

(1) △OAB の面積

(2) △ABC の面積

解答(1)

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}-\frac{1}{4}(\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta})^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4\alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}-(\overline{\alpha}^2\beta^2+2\alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}+\alpha^2\overline{\beta}^2)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{-\overline{\alpha}^2\beta^2+2\alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}-\alpha^2\overline{\beta}^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{-(\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta})^2}$$ ← うまく平方完成ができた。根号の中身は 0 以上

$$=\frac{1}{4}|\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}|$$ 答

(2) (1) により

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{4}|\overline{(\alpha-\beta)}(\alpha-\gamma)-(\alpha-\beta)\overline{(\alpha-\gamma)}|$$

$$=\frac{1}{4}|\overline{\alpha}\alpha-\overline{\alpha}\gamma-\alpha\overline{\beta}+\overline{\beta}\gamma-\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\gamma}+\overline{\alpha}\beta-\beta\overline{\gamma}|$$

$$=\frac{1}{4}|\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\gamma+\overline{\gamma}\alpha-\alpha\overline{\beta}-\beta\overline{\gamma}-\gamma\overline{\alpha}|$$ 答

@ なお，三角形ができないときにも，面積 0 で上の式は成り立っている。内積公式に係数 $\frac{1}{2}$ がついたので，ここでは係数 $\frac{1}{4}$ がついた。$\frac{1}{4}$ は気持ち悪いかもしれぬ。(1) の絶対値中身について

$$\overline{\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}}=\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta=-(\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta})$$

であるから，$\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}$ は純虚数である。さらに偏角について考察すると，次の補題がわかる。

補題 $0<\arg\beta-\arg\alpha<\pi \iff \mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta})>0 \iff \overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}=|\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}|i$

証明 $0<\arg\beta-\arg\alpha<\pi \iff \mathrm{Im}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)>0$

$$\iff \frac{1}{2i}\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}\right)>0$$

$$\iff \alpha\overline{\alpha}\cdot\frac{1}{2i}\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}\right)>0 \qquad (\because\ \alpha\overline{\alpha}>0 \text{ より})$$

$$\iff \frac{1}{2i}(\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta})>0$$

$$\iff \mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta})>0 \iff \overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}=|\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}|i$$ 終

@ これぞ複素平面の醍醐味。この補題は四角形の面積公式で大活躍する。$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ とおいて計算すると，符号による場合分けが多数発生して面倒に(詳細略)。(1) の別解は次の如し。

別解 原点Oを中心に全体を $-\arg\alpha$ だけ回転させて，2つの複素数

$$\alpha' = \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\alpha\ (=|\alpha|),\quad \beta' = \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\beta$$

に対して，点 $A'(\alpha')$ は実軸正の部分にあり，点 $B'(\beta')$ から実軸へ下した垂線の足を H とすると

$$\begin{aligned} B'H &= |\mathrm{Im}\beta'| \\ &= \frac{1}{2}|\beta' - \overline{\beta'}| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\beta - \overline{\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\beta}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\beta - \frac{\alpha}{|\alpha|}\overline{\beta}\right| \end{aligned}$$

よって　$\triangle OAB = \frac{1}{2}|\alpha|\cdot\frac{1}{2}\left|\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\beta - \frac{\alpha}{|\alpha|}\overline{\beta}\right| = \frac{1}{4}|\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta}|$　答

@ 全体を原点の周りに回転させた後で，底辺を OA'，高さを B'H と考えると，さきほどの内積公式は不要となる。その際に，高さが虚部の絶対値であることで見事に解決した。言われてみれば実に自然な発想。探してみると，この類題が既に次の如く 2020 年熊本大学で出題されていた。

問題 α，β を複素数とし，複素数平面上の点 O(0)，A(α)，B(β)，C$(|\alpha|^2)$，D$(\overline{\alpha}\beta)$ を考える。3点 O，A，B は三角形をなすとする。また，複素数 z に対し，$\mathrm{Im}(z)$ によって，z の虚部を表す。

(1) $\triangle OAB$ の面積を S_1，$\triangle OCD$ の面積を S_2 とするとき，$\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(2) $\triangle OAB$ の面積 S_1 は $\frac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$ で与えられることを示せ。

(3) 実数 a，b に対し，複素数 z を $z=a+bi$ で定める。$1 \leqq a \leqq 2$，$1 \leqq b \leqq 3$ のとき，3点 O(0)，P(z)，Q$\left(\frac{1}{z}\right)$ を頂点とする $\triangle OPQ$ の面積の最大値と最小値を求めよ。

解答 (1) $\angle COD = \arg\frac{\overline{\alpha}\beta - 0}{|\alpha|^2 - 0} = \arg\frac{\overline{\alpha}\beta}{\overline{\alpha}\alpha} = \arg\frac{\beta}{\alpha}$

$$= \arg\frac{\beta - 0}{\alpha - 0} = \angle AOB$$

また　$OA : OC = |\alpha| : |\alpha|^2 = 1 : |\alpha|$

$OB : OD = |\beta| : |\overline{\alpha}\beta| = |\beta| : (|\overline{\alpha}|\cdot|\beta|) = 1 : |\alpha|$

よって，$\triangle OAB \backsim \triangle OCD$ であり，相似比は $1 : |\alpha|$ であるから　$\frac{S_2}{S_1} = \frac{|\alpha|^2}{1^2} = |\alpha|^2$　答

(2) 点 C は実軸上の点であるから　$S_2 = \frac{1}{2}|\alpha|^2 \cdot |\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

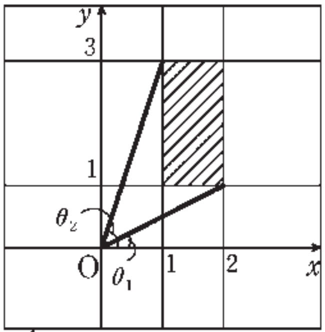
よって，(1) により　$S_1 = \frac{S_2}{|\alpha|^2} = \frac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$　終

(3) z の偏角を $\theta\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと，(2) により

$\triangle OPQ = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\overline{\frac{1}{z}}\cdot z\right)\right|$　← この順番のほうが次の式が簡単に！

$$= \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\frac{z^2}{|z|^2}\right| = \frac{1}{2}|\sin 2\theta|$$

$1 \leqq a \leqq 2$，$1 \leqq b \leqq 3$ であるから，$z=a+bi$ が動く領域は右図斜線部分(含境界線)であり，θ_1，θ_2 を図のようにとると



$$\tan\theta_1=\frac{1}{2},\ \tan\theta_2=3,\ 0<\theta_1<\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}<\theta_2<\frac{\pi}{2}$$

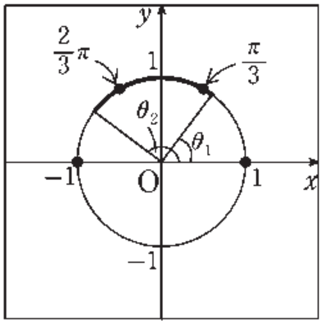
よって　$0<2\theta_1<\frac{\pi}{3}$，$\frac{2}{3}\pi<2\theta_2<\pi$

また，$\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ より，$2\theta_1 \leqq 2\theta \leqq 2\theta_2$ であるから

$\sin 2\theta$ は $2\theta=\frac{\pi}{2}$ で最大値 1 をとる。

したがって，$\triangle$OPQ は $\theta=\frac{\pi}{4}$ すなわち $a=b$ のとき最大値 $\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$ をとる。

また，$\triangle$OPQ が最小となるのは，$\theta=\theta_1$ または $\theta=\theta_2$ のときである。



・$\theta=\theta_1$ のとき

$\tan\theta_1=\frac{1}{2}$ より $\sin\theta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta_1=\frac{2}{\sqrt{5}}$ であるから

$$\triangle \mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}|\sin 2\theta_1|=\sin\theta_1\cos\theta_1=\frac{2}{5}$$

・$\theta=\theta_2$ のとき

$\tan\theta_2=3$ より $\sin\theta_2=\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta_2=\frac{1}{\sqrt{10}}$ であるから

$$\triangle \mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}|\sin 2\theta_2|=\sin\theta_2\cos\theta_2=\frac{3}{10}$$

以上から，$\triangle$OPQ は $\theta=\theta_2$ すなわち $a=1$，$b=3$ のとき最小値 $\frac{3}{10}$ をとる。　答

@ 読者諸賢には，(1) の誘導はセンスが悪く余計なお世話とおわかりのことかと。なお，(3) の解法は問題文の設定 $z=a+bi$ を尊重して，次の如き方針で求めることもできる。概略を記す。

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{OPQ}&=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\overline{z}\cdot\frac{1}{z}\right)\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{a-bi}{a+bi}\right)\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{a^2-2abi-b^2}{a^2+b^2}\right)\right|\\&=\left|\frac{ab}{a^2+b^2}\right|=\frac{\frac{b}{a}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2+1}\qquad(\because\ a\neq 0)\end{aligned}$$

$1 \leqq a \leqq 2$，$1 \leqq b \leqq 3$であるから　$\frac{1}{2} \leqq \frac{b}{a} \leqq 3$

ここで，$x=\frac{b}{a}$，$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ $\left(\frac{1}{2} \leqq x \leqq 3\right)$ とおいて増減を調べてもよい。もし，問われているのが最大値だけなら，相加相乗で一発。

それでは，いよいよ四角形以上の面積について考えてみよう。

4 複素平面と n 角形面積公式

問題 複素平面上に異なる 5 点 O(0)，A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) がある。次のものを α，β，γ，δ を用いて表せ。

(1) 四角形 OABC の面積

(2) 四角形 ABCD の面積

解答 (1) 求める面積は，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の張る平行四辺形の面積の半分であるから　　← これは常識

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left|\overline{(\alpha-\gamma)}\beta-(\alpha-\gamma)\overline{\beta}\right|$$

$$=\frac{1}{4}\left|\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\gamma-\alpha\overline{\beta}-\beta\overline{\gamma}\right| \quad \text{答}$$

(2) (1) により，求める面積は

$$\frac{1}{4}\left|\overline{(\alpha-\beta)}(\alpha-\gamma)+\overline{(\alpha-\gamma)}(\alpha-\delta)-(\alpha-\beta)\overline{(\alpha-\gamma)}-(\alpha-\gamma)\overline{(\alpha-\delta)}\right|$$

$$=\frac{1}{4}\left|\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\gamma+\overline{\gamma}\delta+\overline{\delta}\alpha-\alpha\overline{\beta}-\beta\overline{\gamma}-\gamma\overline{\delta}-\delta\overline{\alpha}\right| \quad \text{答}$$

@ 証明からもわかるように，凹四角形でもこの公式は成り立つ。2 つのベクトルが張る平行四辺形を用いた自然な解法であるが，このままでは絶対値が邪魔をして五角形などへの一般化は困難。そこで，(1) は次の如く別解を探ってみよう。なお，三角形面積公式で準備した先の補題が大活躍することに。

別解 (1) 4 点 O，A，B，C が左回り(正の向き回転)にあるとしても一般性を失わない。

すなわち　　$0<\arg\beta-\arg\alpha<\pi$，$0<\arg\gamma-\arg\beta<\pi$

すなわち　　$\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta})>0$，$\mathrm{Im}(\overline{\beta}\gamma-\beta\overline{\gamma})>0$　　← これが補題そのもの

したがって，求める面積は

$$\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OBC}$$

$$=\frac{1}{4}\left|\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}\right|+\frac{1}{4}\left|\overline{\beta}\gamma-\beta\overline{\gamma}\right|$$

$$=\frac{1}{4i}(\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta})+\frac{1}{4i}(\overline{\beta}\gamma-\beta\overline{\gamma})$$　　← 補題により，絶対値が解消できた！

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\gamma-\alpha\overline{\beta}-\beta\overline{\gamma}}{i}$$

$$=\frac{1}{4}\left|\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\gamma-\alpha\overline{\beta}-\beta\overline{\gamma}\right| \quad \text{答}$$

@ 実に自然な面積分割。絶対値解消に補題を用いたのが最大のポイント。変形途中で虚数単位 i を分母に残したままにした。この副産物として，次の如く外積を複素数で表示した公式ができる。

公式 複素平面上の 3 点O(0)，A(α)，B(β) に対して，座標空間内の点 C を

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}(\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta})\right)$$

となるようにとる。このとき，外積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ である。

証明 外積の定義により $\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=2\triangle\mathrm{OAB}$ ゆえ，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の z 成分の向きも含めて成り立つ。　終

@ これは，2 点 A，B が xy 平面上に限定されるので，公式を活用する場面はない。以上の準備のもとで，n 角形の面積公式への一般化を考えてみよう。

問題 n を 3 以上の自然数とする。複素平面上に異なる $n+1$ 個の点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}_1(\alpha_1)$，$\mathrm{A}_2(\alpha_2)$，……，$\mathrm{A}_n(\alpha_n)$ がある。次のものを α_1，α_2，……，α_n，α_{n+1} を用いて表せ。ただし，$\alpha_{n+1}=\alpha_1$ とする。

(1) n 角形 $\mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2\cdots\cdots\mathrm{A}_{n-1}$ の面積

(2) n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\cdots\mathrm{A}_n$ の面積

解答 (1) n 個の点 O，A_1，A_2，……，A_{n-1} が左回りにあるとしても一般性を失わない。すなわち

$$\mathrm{Im}(\overline{\alpha_1}\alpha_2-\alpha_1\overline{\alpha_2})>0,\ \mathrm{Im}(\overline{\alpha_2}\alpha_3-\alpha_2\overline{\alpha_3})>0,\ \cdots\cdots,\ \mathrm{Im}(\overline{\alpha_{n-2}}\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}\overline{\alpha_{n-1}})>0$$

求める面積は $\triangle\mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2$，$\triangle\mathrm{OA}_2\mathrm{A}_3$，……，$\triangle\mathrm{OA}_{n-2}\mathrm{A}_{n-1}$ の面積の和であるから

$$\frac{1}{4i}(\overline{\alpha_1}\alpha_2-\alpha_1\overline{\alpha_2})+\frac{1}{4i}(\overline{\alpha_2}\alpha_3-\alpha_2\overline{\alpha_3})+\cdots\cdots+\frac{1}{4i}(\overline{\alpha_{n-2}}\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}\overline{\alpha_{n-1}})$$

$$=\frac{1}{4}\left|\sum_{k=1}^{n-2}(\overline{\alpha_k}\alpha_{k+1}-\alpha_k\overline{\alpha_{k+1}})\right| \quad \text{答}$$

(2) 求める面積は $\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$，$\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$，……，$\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ の面積の和であるから，(1) により

$$\frac{1}{4}\left|\sum_{k=2}^{n-1}\{\overline{(\alpha_1-\alpha_k)}(\alpha_1-\alpha_{k+1})-(\alpha_1-\alpha_k)\overline{(\alpha_1-\alpha_{k+1})}\}\right|$$

$$=\frac{1}{4}\left|\sum_{k=2}^{n-1}(\overline{\alpha_k}\alpha_{k+1}-\alpha_k\overline{\alpha_{k+1}})+\sum_{k=2}^{n-1}\overline{\alpha_1}(\alpha_k-\alpha_{k+1})-\sum_{k=2}^{n-1}\alpha_1(\overline{\alpha_k}-\overline{\alpha_{k+1}})\right|$$

$$=\frac{1}{4}\left|\sum_{k=2}^{n-1}(\overline{\alpha_k}\alpha_{k+1}-\alpha_k\overline{\alpha_{k+1}})+\overline{\alpha_1}\alpha_2-\overline{\alpha_1}\alpha_n-(\alpha_1\overline{\alpha_2}-\alpha_1\overline{\alpha_n})\right| \quad \text{← 途中がすべて消えた！}$$

$$=\frac{1}{4}\left|\sum_{k=2}^{n-1}(\overline{\alpha_k}\alpha_{k+1}-\alpha_k\overline{\alpha_{k+1}})+\overline{\alpha_1}\alpha_2-\alpha_1\overline{\alpha_2}+(\overline{\alpha_n}\alpha_{n+1}-\alpha_n\overline{\alpha_{n+1}})\right| \quad (\because\ \alpha_1=\alpha_{n+1}\ \text{より})$$

$$=\frac{1}{4}\left|\sum_{k=1}^{n}(\overline{\alpha_k}\alpha_{k+1}-\alpha_k\overline{\alpha_{k+1}})\right| \quad \text{答}$$

@ 実に見事な Σ 計算。途中がすべて消えて，$\alpha_{n+1}=\alpha_1$ とした設定のおかげでうまく cyclic order (輪環の順)になる点が美しい。実際に $n=3$，4 を代入してみると，先ほどの結果と一致することも確認できる。また，$\alpha_k=r\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$ を代入すると，半径 r の円に内接する正 n 角形の面積にもなる。本校で 1 年生を担当することは稀であるが，そのたびに感心することは数名の生徒が 新入生の 4 月時点で輪環の順の英単語を知っているということである。もちろん 50 年前の私は知らなかった。今の生徒は知識の吸収という点では大昔より遙かに優秀。肝心の思考力は如何に。

5 おわりに

筆者は非常勤および予備校講師満 3 年の新参者。毎日あちこちで多様な生徒との出会いは宝物。参考書の執筆活動もぼちぼちさせて戴いている。今回ご紹介した複素平面内積と面積は，県東部の某私立高校 3 年生東大理系組授業中における生徒とのやり取りが発端。その男子生徒は県外からの通学生。2 次試験数学高得点で理科Ⅱ類に一発大逆転合格した。ご紹介した面積の問題は参考文献黒表紙参考書にも演習問題としてノーヒントで収録されている。ノーヒントゆえ非常に厳し。

かような内容が，近い将来大学入学共通テストで出題されることも予想される。何が出題されるかわからぬ悩ましい共通テスト。少なくとも令和 7 年度試作問題の寄せ集め駄作よりは遙かによき作品ができるであろう。複素平面といろいろな曲線の広い 2 分野で 1 大問としたら，作問は厳しい

に決まっておる。軽い2中問になるか重い1大問になるしかない。いずれも不格好。配点についても試作問題の如き半端な数値になり，単位数との比例配分の大原則を逸脱するという醜態を大学入試センターは世に晒した。誠にお粗末。この中途半端配点が今後も続くとは限らぬ。

そもそも complex plane の日本語訳は複素平面のはず。どこにも number などない。文科省のエリートが和訳さえできぬとは。恣意的に間違った専門用語がつくられたようであるが，寛大でない私の授業では間違いを正す姿勢を貫くことにしておる。京大入試問題の文章もまた然り。一方，東大は文科省のお膝元ゆえ，さにあらず。間違った事実に対する両者の対応の違いはおもろすぎるかと。

本論文の一般化などの考察は，大部分が休日遠距離ロードや県内外の山の頂や尾根，そして私立高校への往復ロードの道中で考えたもの。絶対値の解消も道中降臨した。しかしながら，私もまだまだ発展途上人。枕を濡らして眠れぬ夜を過ごすこともしばしば。これからも進化を続けて参ります。教師たるもの，生涯求道者。収束などいたしません。最後になりましたが，発表の機会をくださった編集委員の先生方，そして拙作を最後までお読みくださった読者の皆様に御礼申しあげます。

参考文献

山川　宏史　フォーカスゴールド数学B+C 5th Edition (共著) の実戦編　　啓林館
山川　宏史　フォーカスゴールド数学Ⅲ　5th Edition (共著) の実戦編　　啓林館