三角関数の定積分計算と複素平面について

山　川　宏　史

岡山朝日研究紀要 第45号（2024年 3 月）抜刷
〒703-8278 岡山市中区古京町2-2-21

三角関数の定積分計算と複素平面について

山　川　宏　史

1　はじめに

数学Ⅲの授業で，三角関数の定積分計算のために便利な公式を扱う。これを一般化すると，難解に見える定積分の値が容易に求まる。また，無限級数の和が区分求積法により定積分の計算で求まることも授業で扱うが，実はこの操作を逆にたどると不可能に見える定積分の値が求まる。今回機会を与えられたので，これらの積分計算の奥義をご紹介することにした。普通の積分計算では不可能な技を一挙大公開するので，どうぞお楽しみに。ただし，そのために三角関数の諸公式を複素平面の技を用いて導出する場面があるので，かなりおもろいことに。また，高校３年生にも理解できるよう詳しく記述したので，授業等でもどうぞお試しでご活用あれ。天下の朝日高校ならば，一応可能なはず。近い将来，どこぞの大学が入試問題の素材として使用する可能性もあるかと。

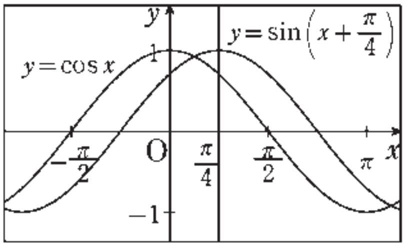
2　三角関数の対称性を利用した定積分について

次の公式は，多くの教科書や参考書等にも掲載されているように，非常に有名である。

公式 $f(x)$ が積分可能であるとき　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

@ 置換積分法で証明するか，グラフの対称性で瞬殺。まずは，この公式の一般化を考えてみよう。

公式 $f(x)$ が積分可能であるとき　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos x)dx$

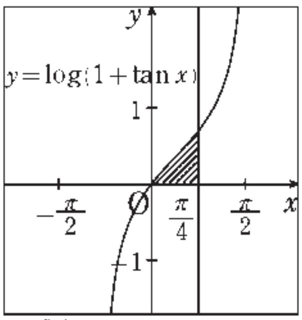


証明 $t=\dfrac{\pi}{4}-x$　とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=-1$ であるから

$$(\text{左辺})=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos t)dt=(\text{右辺})$$　終

@ 形が難しく見えるかもしれぬが，グラフの対称性からも瞬殺。これを応用した次の問題は如何に。



問題 定積分　$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(1+\tan x)dx$　の値を求めよ。

解答 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\cos x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\sqrt{2}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\cos x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\cos x\,dx$$　（∵　公式より）

$$=\frac{\pi}{8}\log 2$$　答

@ 公式のおかげで実に鮮やか。なお，$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos x\,dx$ が有限確定値であることも一応用いている。

次の別解は如何に。

別解 $t=\dfrac{\pi}{4}-x$　とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=-1$ であるから

$$I=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\log\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right\}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\frac{2}{1+\tan t}\,dt=\frac{\pi}{4}\log 2-I$$

よって　　$I=\dfrac{\pi}{8}\log 2$　答

@ 先の公式証明と同じ置換。しかし，やや気づきにくい。被積分関数を加法定理でばらすと，同じものが出現して一発で解決した。読者諸賢はこれが一般化かと訝る向きもあろう。次でそれが解明できる。以下，a，b は実数の定数とする。

公式の本当の一般化 $f(x)$ が積分可能であるとき　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-a} f(\sin(x+a))dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}-a} f(\cos x)dx$

証明 $t=\dfrac{\pi}{2}-a-x$　とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=-1$ であるから

$$(\text{左辺})=-\int_{\frac{\pi}{2}-a}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}-a} f(\cos t)dt=(\text{右辺})$$　終

@ 最初の教科書公式は $a=0$，先の公式は $a=\dfrac{\pi}{4}$ の場合である。かように一般化すると，sin の中身の定数項と定積分の上端が食い違うことに。では，先の問題も一般化してみよう。

問題 定積分　$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-a}\log(\tan a+\tan x)dx$　の値を求めよ。ただし，$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ である。

解答 $$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}-a}\log\frac{\sin x+\tan a\cos x}{\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}-a}\log\frac{1}{\cos a}\sin(x+a)\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}-a}\log\cos x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}-a}\log\frac{1}{\cos a}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}-a}\log\cos x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}-a}\log\cos x\,dx \quad (\because\ \text{一般化公式より})$$

$$=\left(a-\frac{\pi}{2}\right)\log\cos a$$　答

@ 一般化公式のおかげで実に鮮やか。別解も先の問題と同様な置換で計算可能。どうぞ，読者諸賢でご検証あれ。なお，$a=\dfrac{\pi}{4}$ を代入すると，先の結果と一致することもすぐ確認できる。tan ゆえ，a の範囲が必要に。さらに，三角関数に限定しない次の一般化公式がある。

公式 King Property

$f(x)$ が積分可能であるとき　$\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_a^b f(x)dx$

証明 $t=a+b-x$　とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=-1$ であるから

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=-\int_b^a f(t)dt\\&=\int_a^b f(t)dt=(\text{右辺})\end{aligned}$$　終

@ 何と，この公式には名前までついている。しかも，王の性質とは。グラフの対称性を考えれば，瞬殺。この応用例は次の如し。

問題 定積分　$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(1+\tan x)dx$　の値を求めよ。

解答 King Property で　$a=0$，$b=\dfrac{\pi}{4}$，$f(x)=\log(1+\tan x)$　とおくと

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(1+\tan x)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)dx=I$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\frac{2}{1+\tan x}dx=I$$

$\dfrac{\pi}{4}\log 2-I=I$　　よって　　$I=\dfrac{\pi}{8}\log 2$　　答

@ 前ページの別解とほぼ同じ解法になった。では，これも一般化してみよう。

問題 定積分　$I=\displaystyle\int_a^b\log\{1+\tan(a+b)\tan x\}dx$　の値を求めよ。

解答 King Property で　$f(x)=\log\{1+\tan(a+b)\tan x\}$　とおくと

$$\int_a^b\log\{1+\tan(a+b)\tan(a+b-x)\}dx=\int_a^b\log\{1+\tan(a+b)\tan x\}dx$$

$$\int_a^b\log\left\{1+\tan(a+b)\cdot\frac{\tan(a+b)-\tan x}{1+\tan(a+b)\tan x}\right\}dx=I$$

$$\int_a^b\log\frac{1+\tan^2(a+b)}{1+\tan(a+b)\tan x}dx=I$$

$$\int_a^b\log\frac{1}{\cos^2(a+b)}dx-I=I$$

よって　　$I=(a-b)\log\cos(a+b)$　　答

@ 分子の変形がお見事。$a=0$，$b=\dfrac{\pi}{4}$ を代入すると，先の結果と一致することもすぐ確認できる。

われらが朝日高校の先生方に出題すると，こぞって解答してくださった。督促一切不可。年寄りによるいじめにならぬ配慮は大切。校務や雑用などに忙殺される若い衆には迷惑かもしれぬゆえ。なお，King Property は次の如く 2005 年名古屋大学で出題されていた。

問題 (1) 連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi-x)=f(x)$ を満たすとき，

$$\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)dx=0$$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$ を求めよ。

解答 (1) $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)dx$ とおく。

$t=\pi-x$ とおくと　$x=\pi-t$，$dx=-dt$

x	$0\to\pi$
t	$\pi\to 0$

よって　$$I=\int_{\pi}^{0}\left(\pi-t-\frac{\pi}{2}\right)f(\pi-t)(-1)dt$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)f(t)dt=-I$$

したがって　$I=0$　すなわち　$\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)dx=0$　終

(2) $J=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$ とおく。

$f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}$ とすると　$f(\pi-x)=\dfrac{\sin^3(\pi-x)}{4-\cos^2(\pi-x)}=\dfrac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}=f(x)$

よって

$$J=\int_0^{\pi}xf(x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)dx+\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(x)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(x)dx \qquad (\because\ (1)\text{より})$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos^2 x}{4-\cos^2 x}\cdot\sin x\,dx$$

$u=\cos x$ とおくと　$-\sin x\,dx=du$

x	$0\to\ \pi$
u	$1\to -1$

したがって

$$J=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{1-u^2}{4-u^2}\cdot(-1)du$$

$$=\pi\int_0^1\left(1+\frac{3}{u^2-4}\right)du$$

$$=\pi\int_0^1\left\{1+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u+2}\right)\right\}du$$

$$=\pi\left[u+\frac{3}{4}(\log|u-2|-\log|u+2|)\right]_0^1=\pi\left(1-\frac{3}{4}\log 3\right)$$　答

@ (1) の誘導のおかげで，試験会場でも完解は一応可能。なお，(1) の等式は

$$\int_0^{\pi} xf(x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(x)dx$$

と書かれることも多い。遙か昔からある有名恒等式。35 年前，私が初任校から母校に転勤する際，時の校長さんから　$f(x)=\sin x$　として試練出題された。同じ年に名古屋大学後期では，次の問題も出題されていたので，ついでに掲載しておく。

問題 実数 x および自然数 n に対して，$a_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ \cdots\cdots\ \cos\frac{x}{2^n}$ とする。

(1) $2^n a_n \sin\frac{x}{2^n}$ の値は，n と無関係に一定であることを証明せよ。

(2) $\log|a_n|$ を x で微分することにより $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^n}=\frac{1}{\pi}$ を証明せよ。

解答 (1)
$$\begin{aligned}
2^n a_n \sin\frac{x}{2^n} &= 2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ \cdots\cdots\ \cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}\\
&=2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ \cdots\cdots\ \cos\frac{x}{2^{n-1}}\left(2\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}\right)\\
&=2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ \cdots\cdots\ \cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\\
&=2^{n-1}a_{n-1}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\\
&=\ \cdots\cdots\ =2a_1\sin\frac{x}{2}=\sin x
\end{aligned}$$

よって，n と無関係に一定である。　終

(2) $\log|a_n|=\log\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\log\left|\cos\frac{x}{2^2}\right|+\cdots\cdots+\log\left|\cos\frac{x}{2^n}\right|$　……①

また，(1) から　　$\sin\frac{x}{2^n}\fallingdotseq 0$ のとき　　$a_n=\dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$

よって　　$\log|a_n|=\log|\sin x|-n\log 2-\log\left|\sin\frac{x}{2^n}\right|$　……②

①，② から　　$\log|\sin x|-\log\left|\sin\frac{x}{2^n}\right|-n\log 2=\sum_{k=1}^{n}\log\left|\cos\frac{x}{2^k}\right|$

両辺を x で微分すると

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\cdot\frac{-\sin\frac{x}{2^k}}{\cos\frac{x}{2^k}}\right)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}$$

よって　　$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{x}{2^k}$

この恒等式に，$x=\dfrac{\pi}{2}$ を代入すると

$$0+\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{\pi}{2^{k+1}}=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{2^{k}}\tan\frac{\pi}{2^{k}}$$

よって　$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}\tan\frac{\pi}{2^{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\pi}\cdot\frac{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}\right)=\frac{1}{\pi}$$　終

@ 一応誘導はあるが，果たして試験会場でかような問題を完解できるのか。

3 複素平面を利用して三角関数公式をつくる技について

まず，次の記号を定義しておく。

定義 積の記号　$\prod_{k=1}^{n}a_k=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdots\cdot a_n$

これは Σ 記号の積 version に当たる。では，次の問題を複素平面を用いて考えてみよう。

問題 n を 2 以上の自然数とするとき，$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\cos\dfrac{k\pi}{n}\right)$ を n を用いて表せ。

解答 x の方程式　$x^{2n}-1=0$ ……①　を考えると　　← $2n$ 乗を考えるのがポイント

$$(x-1)(x^{2n-1}+x^{2n-2}+\cdots\cdots+x+1)=0$$

と因数分解できる。ここで，$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{n}+i\sin\dfrac{\pi}{n}$ とおくと，α^k ($k=0$，1，2，……，$2n-1$) が①の解すべてであるから　　← これは primitive $2n$−th root of 1

$$x^{2n-1}+x^{2n-2}+\cdots\cdots+x+1=\prod_{k=1}^{2n-1}(x-\alpha^k)\ \cdots\cdots ②$$

である。恒等式②の両辺に $x=1$ を代入すると　　← 常套手段

$$2n=\prod_{k=1}^{2n-1}(1-\alpha^k)$$

$$=\left\{\prod_{k=1}^{n-1}(1-\alpha^k)\right\}\{1-(-1)\}\left\{\prod_{k=n+1}^{2n-1}(1-\alpha^k)\right\}$$　← $1\sim n-1$，n，$n+1\sim 2n-1$ に分けた。

$$=2\prod_{k=1}^{n-1}(1-\alpha^k)(1-\overline{\alpha}^k)$$　← $n+1\sim 2n-1$ を共役複素数 $1-\overline{\alpha}^k$ で表示

$$=2\prod_{k=1}^{n-1}(1-\alpha^k-\overline{\alpha}^k+\alpha^k\overline{\alpha}^k)$$

$$=2\prod_{k=1}^{n-1}\left(2-2\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$　← $\alpha^k+\overline{\alpha}^k=2\cos\dfrac{k\pi}{n}$　これが重要！

よって　$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$$　答

@ これは鮮やか。共役複素数で表すことが最大のポイント。index を $h=n-k$ とつけ替えると $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$ も即座にわかる。方程式 $x^{2n}-1=0$ に対して，primitive $2n-$th root of 1 を利用し，$x=1$ を代入した。これらは有名恒等式。また，x にほかの数値を代入する技は後述。なお，微分や極限を用いた別解は次の如し。解答の途中のみ記す。

別解 x の多項式 $x^{2n}-1$ は

$$x^{2n}-1=\prod_{k=0}^{2n-1}(x-\alpha^k)\cdots\cdots ②$$

と因数分解できる。恒等式 ② の両辺を x で微分すると，右辺は積の微分公式により

$$2nx^{2n-1}=(x-\alpha^1)(x-\alpha^2)\cdots\cdots(x-\alpha^{2n-1})+(x-\alpha^0)(x-\alpha^2)\cdots\cdots(x-\alpha^{2n-1})$$
$$+\cdots\cdots+(x-\alpha^0)(x-\alpha^1)\cdots\cdots(x-\alpha^{2n-2})$$

この恒等式に $x=1$ を代入すると

$$2n=\prod_{k=1}^{2n-1}(1-\alpha^k)$$ 以下同様 ← 右辺の 2 項め以降はすべて消える！

別解 x の多項式 $x^{2n}-1$ は

$$x^{2n}-1=\prod_{k=0}^{2n-1}(x-\alpha^k)\cdots\cdots ②$$

と因数分解できる。$x\fallingdotseq 1$ のとき

$$\frac{x^{2n}-1}{x-1}=\prod_{k=1}^{2n-1}(x-\alpha^k)$$

両辺の $x\to 1$ の極限をとると，微分係数の定義により ← これがポイント，気付きにくいか

$$2n=\prod_{k=1}^{2n-1}(1-\alpha^k)$$ 以下同様

@ この解法の骨子は，多くの参考書では次の如く正 n 角形の対角線問題として掲載されている。

問題 $\alpha=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ とする。点 $P_k(\alpha^k)$ を結んでできる正 n 角形 $P_0P_1P_2\cdots\cdots P_{n-1}$ に対して，$\prod_{k=1}^{n-1}P_0P_k$ を n を用いて表せ。

解答 x の方程式 $x^n-1=0\cdots\cdots ①$ を考えると ← n 乗を考えるのが自然

$$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1)=0$$

と因数分解できる。ここで，$\alpha=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ とおくと，α^k $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ が ① の解すべてであるから ← これは primitive $n-$th root of 1

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1=\prod_{k=1}^{n-1}(x-\alpha^k)\cdots\cdots ②$$

である。恒等式 ② の両辺に $x=1$ を代入すると ← 常套手段

$$1+1+\cdots\cdots+1+1=\prod_{k=1}^{n-1}(1-\alpha^k)$$

両辺の絶対値をとると $n=\prod_{k=1}^{n-1}|1-\alpha^k|$ すなわち $\prod_{k=1}^{n-1}P_0P_k=n$ 答

@ 先の $2n$ 乗根の発想が厳しいようであれば，これを用いて次の如く解答することもできる。

問題 $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$，$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)$，$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\cos\frac{k\pi}{n}\right)$ を n を用いて表せ。

解答 $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\mathrm{P}_0\mathrm{P}_k=n$　までは，直前の解答と同じ。

ここで，$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_k=2\sin\dfrac{k\pi}{n}$　であるから　　　← sin の定義

$$\prod_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{n}=n$$

よって　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$　答

$$\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)^2=\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)^2$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\cos\frac{k\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)^2$$

ここで　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)>0$　であるから

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$$　答

@ この解法のほうが簡潔に見えるかもしれぬ。なお，$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1-\alpha^k)$ の計算については

$$\begin{aligned}1-\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)&=2\sin^2\frac{k\pi}{n}-2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\\&=2\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n}\right)\\&=2\sin\frac{k\pi}{n}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{n}\right)\right\}\end{aligned}$$

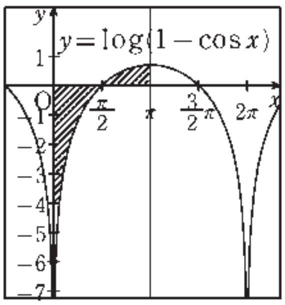
と極形式変換して偏角の和で処理もできるが，この準備案外大変か。では，いよいよ大技に挑戦しよう。

4 区分求積法を利用した定積分の計算について

問題 定積分　$I=\displaystyle\int_0^{\pi}\log(1-\cos x)dx$　の値を求めよ。

解答 区分求積法と先の問題により

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)\qquad\text{← 区間}[0,\ \pi]\text{ を }n\text{ 等分した。}\\&=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log 2\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)\qquad\text{← }k=n\text{ だけ分離した。}\\&=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{n}{2^{n-2}}\\&=\pi\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log n}{n}-\frac{n-2}{n}\log 2\right)\\&=-\pi\log 2\qquad\left(\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0\text{ より}\right)\end{aligned}$$　答



@ なお，$\log(1-\cos 0)=\log 0=-\infty$ ゆえ，これは所謂広義積分。$\displaystyle\lim_{a\to+0}\int_a^{\pi}\log(1-\cos x)dx$　など

としたらもちろん計算不能。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ は既知とした。また，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}$ にしたら，$k=0$ のときに困る。ということは，分割により値が収束するかどうかの判断ができにくいので，Riemann 積分可能という条件を問題文に追加しておかなくてはならぬことがわかる。これは意外なことに。

では，被積分関数の cos に係数をつけた次の問題を解答してみよう。

問題 定積分　$J=\displaystyle\int_0^{\pi}\log(5-4\cos x)dx$　の値を求めよ。

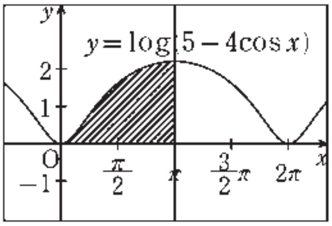
解答 最初の問題の解答途中式を用いると

$$x^{2n}-1=(x-1)\left\{\prod_{k=1}^{n-1}(x-\alpha^k)\right\}\{x-(-1)\}\left\{\prod_{k=n+1}^{2n-1}(x-\alpha^k)\right\}$$

$$x^{2n}-1=(x^2-1)\left\{\prod_{k=1}^{n-1}(x-\alpha^k)(x-\overline{\alpha}^k)\right\}\cdots\cdots ③$$

これに $x=2$ を代入すると　　　　　　← 代入する数値を変更した。

$$2^{2n}-1=(2^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(2-\alpha^k)(2-\overline{\alpha}^k)$$



$$\prod_{k=1}^{n-1}(4-2\alpha^k-2\overline{\alpha}^k+\alpha^k\overline{\alpha}^k)=\frac{2^{2n}-1}{3}$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(5-4\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{2^{2n}-1}{3}$$

$$J=\int_0^{\pi}\log(5-4\cos x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(5-4\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log 9\prod_{k=1}^{n-1}\left(5-4\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$　　← $k=n$ だけ分離した。

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log 3(2^{2n}-1)$$

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left\{3\cdot 2^{2n}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\right\}$$

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\left\{2\log 2+\frac{1}{n}\log 3\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\right\}=2\pi\log 2$$　答

@ これを一般化すると，次の如し。

問題 定積分　$I_a=\displaystyle\int_0^{\pi}\log(a^2+1-2a\cos x)dx$　（a は定数）　の値を求めよ。

解答・$a=1$ のとき　　前ページの問題により

$$I_1=\int_0^{\pi}\log(2-2\cos x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\{\log 2+\log(1-\cos x)\}dx$$

$$=\pi\log 2-\pi\log 2=0$$

・$a=-1$ のとき　　前述の $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$ により　$I_{-1}=0$

・$a\fallingdotseq\pm1$ のとき　　前ページの③に $x=a$ を代入して　　　← 一般化した $x=a$ を代入

$$a^{2n}-1=(a^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(a-\alpha^k)(a-\overline{\alpha}^k)$$

$$=(a^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(a^2+1-2a\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(a^2+1-2a\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}\qquad(\because\ a\fallingdotseq\pm1\text{ より})$$

よって

$$I_a=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(a^2+1-2a\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a+1)^2\prod_{k=1}^{n-1}\left(a^2+1-2a\cos\frac{k\pi}{n}\right)\qquad\leftarrow k=n\text{ だけ分離した。}$$

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{|a+1||a^{2n}-1|}{|a-1|}$$

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left\{\left|\frac{a+1}{a-1}\right|a^{2n}\left|1-\frac{1}{a^{2n}}\right|\right\}$$

・$|a|>1$ のとき

$$I_a=\pi\lim_{n\to\infty}\left\{2\log|a|+\frac{1}{n}\log\left|\frac{a+1}{a-1}\right|\left|1-\frac{1}{a^{2n}}\right|\right\}=2\pi\log|a|$$

・$|a|<1$ のとき

$$I_a=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{|a+1||a^{2n}-1|}{|a-1|}=0$$

以上から　　$\displaystyle\int_0^{\pi}\log(a^2+1-2a\cos x)dx=\begin{cases}2\pi\log|a| & (|a|\geqq1)\\ 0 & (|a|<1)\end{cases}$　答

@ 結構凝った計算になってしまったが，これでめでたく一般化が完了した。なお，$I_2=J$

$I_1=I+\pi\log2$　となり，先の結果と合致することもわかる。上側の式は

$$\int_0^{\pi}\log(a+b\cos x)dx=\pi\log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}\qquad(\text{ただし，}b^2=4(a-1)\geqq0)$$

と記述することもできる。また，同様な計算により

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos x\,dx=-\frac{\pi}{2}\log2\qquad\text{よって}\qquad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\tan x\,dx=0$$

も以下の如くわかる。これには次(1)の準備が必要。(2)は有名恒等式。証明はどうぞ読者諸賢で。

問題 n を自然数とする。次の等式を示せ。

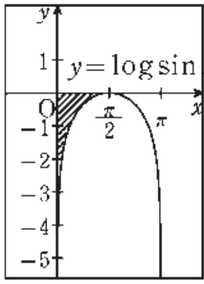
(1) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$　　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$　　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\tan\frac{k\pi}{2n}=1$　　(いずれも，$n\geqq2$ のとき)

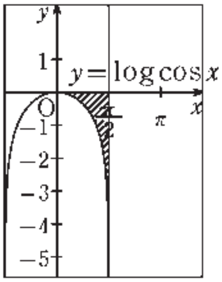
(2) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}=\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{(2k-1)\pi}{4n+2}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$

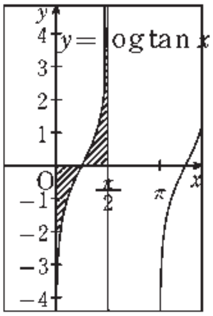
$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1}=\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n+2}=\frac{1}{2^n}$　　　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\tan\frac{k\pi}{2n+1}=\sqrt{2n+1}$

問題 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\,dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\,dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan x\,dx$$







解答 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} \log\sin\left(\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} \log\sin\frac{k\pi}{2n}$ ← $k=n$ のときは 1

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n}\log\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n}\log\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n}\left\{\frac{1}{2}\log n-(n-1)\log 2\right\} = -\frac{\pi}{2}\log 2$ 答

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \log\cos\left(\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} \log\cos\frac{k\pi}{2n}$ ← $k=0$ のときは 1

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n}\log\left(\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}\right)$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n}\log\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} = -\frac{\pi}{2}\log 2$ 答

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{\sin x}{\cos x}dx = -\frac{\pi}{2}\log 2 + \frac{\pi}{2}\log 2 = 0$ 答

@ なお，グラフからもわかるように，$t=\dfrac{\pi}{2}-x$ の置換によって cos は瞬殺。tan は点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 0\right)$ に関する対称性から瞬殺。

5 複素平面に関する出題例など

では，次の問題を考えてみよう。

問題 n を 2 以上の自然数とする。$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とし，複素平面上に n 個の点 $P_k(\alpha^k)$ ($k=0$, 1, ……, $n-1$) をとる。

(1) $n=3$ とする。$(1-\alpha)(1-\alpha^2)$ の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\log_n P_0P_k$ の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\cdots\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$ の値を求めよ。

解答 (1) $\alpha=\omega$ であるから

$(1-\alpha)(1-\alpha^2)=1-\alpha-\alpha^2+1=3$ 答

(2) $z=1$, α, α^2, α^3, ……, α^{n-1} は方程式 $z^n=1$ の異なる n 個の解であるから

$$z^n-1=(z-1)(z-\alpha)(z-\alpha^2)(z-\alpha^3)\cdots\cdots(z-\alpha^{n-1})$$

と因数分解できる。この左辺は

$$z^n-1=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots\cdots+z+1)$$

とも因数分解できるので，恒等式

$$(z-\alpha)(z-\alpha^2)(z-\alpha^3)\cdots\cdots(z-\alpha^{n-1})=z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots\cdots+z+1$$

が得られる。この式に $z=1$ を代入して　$(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)\cdots\cdots(1-\alpha^{n-1})=n$ …… ①

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\log_n \mathrm{P_0P}_k=1$　答

(3) $k=1$, 2, 3, ……, $n-1$ に対して

$$\begin{aligned}|1-\alpha^k|^2&=(1-\alpha^k)(1-\overline{\alpha^k})\\&=1-(\alpha^k+\overline{\alpha^k})+\alpha^k\overline{\alpha^k}\\&=2-2\cos\frac{2k\pi}{n}\\&=2-2\left(1-2\sin^2\frac{k\pi}{n}\right)\\&=4\sin^2\frac{k\pi}{n}\end{aligned}$$

$0<\dfrac{k\pi}{n}<\pi$ であるから　$|1-\alpha^k|=2\sin\dfrac{k\pi}{n}$　　← sin の符号についてのコメントは要

よって，(1) の途中式により

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\cdots\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

$$=\frac{1}{2}|1-\alpha|\cdot\frac{1}{2}|1-\alpha^2|\cdot\frac{1}{2}|1-\alpha^3|\cdots\cdots\frac{1}{2}|1-\alpha^{n-1}|=\frac{n}{2^{n-1}}$$　答

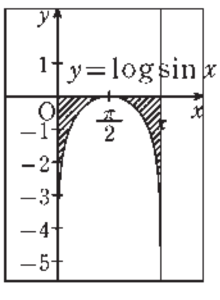
@ この問題を昨年度某高校 3 年生校内実力考査に出題した。ほぼ撃沈，1 名のみ完解。最後は有名問題。これまでの知識を用いると，次の如き問題が解答できる。

問題 $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\log\sin x\,dx$　の値を求めよ。

解答 前述の如く　$\displaystyle\int_0^{\pi}\log(1-\cos x)dx=\int_0^{\pi}\log(1+\cos x)dx=-\pi\log 2$ …… ①

$$\begin{aligned}2I&=\int_0^{\pi}\log\sin^2 x\,dx\\&=\int_0^{\pi}\log(1-\cos x)dx+\int_0^{\pi}\log(1+\cos x)dx\\&=-2\pi\log 2\quad(\because ①より)\end{aligned}$$

よって　$I=-\pi\log 2$　答



別解 直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ に関する対称性と前ページの内容により

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x\,dx=-\pi\log 2$$　答

別解 前述の如く　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$ ……①

閉区間 $[0,\ \pi]$ を n 等分して右端の長方形を無視すると

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log\sin\frac{k\pi}{n}\qquad\leftarrow\sum_{k=1}^{n-1}\text{ で考えてもよい？}$$

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{n}{2^{n-1}}\qquad(\because\ ①\text{より})$$

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log n}{n}-\frac{n-1}{n}\log 2\right)$$

$$=-\pi\log 2$$ 答

@ 一応答えは合ったが，無視した右端長方形は高さが無限ゆえ，かようなものを無視できるわけがない。区間の両端が広義の定積分ゆえ，これを解消する手段などない。その点，本解は片方の端点のみが広義の定積分になるよう細工してある。教訓は，くれぐれも平素の授業で

「区分求積法は有限個の長方形面積を都合よきように無視しても結構」

などと宣言してはならぬことである。

6 おわりに

実は本論文のきっかけは，岡山白陵高等学校に永年勤務されている数学科主任岡村修志先生から昨年度出題されたクイズ。同校への往復ロード数回では解答できなかった。解法を教わり一般化を日夜考えているうち，同校 3 年東大理系組の授業中にそれが可能なことが突如降臨した。ちょうど同じ頃，われらが朝日高校 3 年理系組のマニア少年から King Property の名称を教えてもらった。内容そのものは知っていたが，かような名前までついているとは。少々恥ずかしい思いをしたが，知らぬものは知らぬ。これらをまとめる過程でさまざまなことがわかり，定積分計算に関するかような合体マニアック大作が完成した次第。昨年度はおもろかった。入試結果との相関も。

優秀な若い衆との触れあいは実に有り難し。彼らに教えられることもしばしば。昨年度は，他にもマニア少年が在籍し，私が出題した超難問に対する解答作品を次ページに特別オマケ掲載した。ただし，途中計算量は膨大でかなり省略した。$\tan^{-1}x$ の微分公式，重たい部分分数分解と

$$\int_0^1\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\log 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\qquad\int_0^1\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2})+\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

の実地練習による $\tan^{-1}$ の数値を推察・検証する部分が決め手。この超重量積分計算のために大切な受験勉強を数日間妨害してしまい，私は反省した。彼は地元の理学部数学科に楽勝で合格，今後の活躍が期待できる。どうぞ作品をご堪能あれ。残念ながら，今年度かような生徒はいなかった。

私はまだまだ発展途上人。真理という大海原の前で砂遊びに興じる幼児が如し。枕を濡らして眠れぬ夜を過ごすこともしばしば。これからも進化を続けて参ります。教師たるもの，生涯求道者。収束など決していたしません。最後になりましたが，発表の機会をくださった編集委員の先生方，難解な本論文を読破くださった読者の皆様に御礼申しあげます。

参考文献

山川　宏史　フォーカスゴールド数学Ⅲ　5th Edition (共著) の実戦編　啓林館
山川　宏史　フォーカスゴールド数学B+C　5th Edition (共著) の実戦編　啓林館

$\boxed{\text{オマケコーナー}}$

$\boxed{\text{問題}}$ 定積分 $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^5+1}$ の値を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$ $I=\dfrac{1}{5}\displaystyle\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x^3-2x^2+3x-4}{x^4-x^3+x^2-x+1}\right)dx$ ← 直感部分分数分解

$=\dfrac{1}{5}\log 2-\dfrac{1}{20}\displaystyle\int_0^1\frac{4x^3-3x^2+2x-1-5x^2+10x-15}{x^4-x^3+x^2-x+1}dx$ ← 分子の細工は定石

$=\dfrac{1}{5}\log 2-0+\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^1\frac{x^2-2x+3}{x^4-x^3+x^2-x+1}dx$

$$=\frac{1}{5}\log 2+\frac{1}{4\sqrt{5}}\int_0^1\left(\frac{2x+\frac{3\sqrt{5}+1}{2}}{x^2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}x+1}-\frac{2x-\frac{3\sqrt{5}-1}{2}}{x^2-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x+1}\right)dx$$ ← 同上

$$=\frac{1}{5}\log 2+\frac{1}{4\sqrt{5}}\int_0^1\left(\frac{2x+\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\sqrt{5}+1}{x^2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}x+1}-\frac{2x-\frac{\sqrt{5}+1}{2}-\sqrt{5}+1}{x^2-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{5}\log 2+\frac{1}{4\sqrt{5}}\log\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{5}}\int_0^1\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2}$$

$$+\frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}}\int_0^1\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{5}\log 2+\frac{1}{4\sqrt{5}}\log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$+\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5(10+2\sqrt{5})}}\left(\tan^{-1}\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-\tan^{-1}\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)$$

$$+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5(10-2\sqrt{5})}}\left(\tan^{-1}\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-\tan^{-1}\frac{-\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right)$$ ← この数値が厳し

$$=\frac{1}{5}\log 2+\frac{1}{2\sqrt{5}}\log\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5(10+2\sqrt{5})}}\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{\pi}{10}\right)+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5(10-2\sqrt{5})}}\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\log 2+\frac{1}{\sqrt{5}}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{\pi}{5}\cdot\frac{(5+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5(10+2\sqrt{5})}+\frac{2\pi}{5}\cdot\frac{(5-\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5(10-2\sqrt{5})}$$

$$=\frac{1}{5}\log 2+\frac{1}{\sqrt{5}}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{\pi}{50}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+2\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)\quad\cdots\cdots①$$

$$=\frac{1}{5}\log 2+\frac{1}{\sqrt{5}}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}\,\pi}{5\sqrt{10}}$$ 答

@ 少年の作品は ① まで。最終行は私が追加した。超重量級定積分計算。実は複素平面を用いると，n の偶奇を場合分けすることで一般化が一応可能。次の定積分の値を n で表すことができる。しかしながら，膨大な計算と事前準備が必要ゆえ，記述をするにはこの余白はあまりにも狭すぎる。

$$\int_0^1\frac{dx}{x^{2n}+1}\qquad\int_0^1\frac{dx}{x^{2n-1}+1}$$